財金論文叢刊
2012 年 12 月，第十七期，1-19

一個新的風險衡量指標與傳統風險衡量指標之比較

Comparing a New Risk Measure with Some Traditional Risk Measures

俞淑惠（Shu-Hui Yu）
國立高雄大學統計學研究所副教授
Institute of statistic, NUK

廖思淳（Szu-Tsun Liao）
國立高雄大學統計學研究所風險管理組
Risk measurement program, institute of statistic, NUK

摘要

「風險管理」是一門投資者都關注的課題，但是風險的發生無法準確地被預測，本文希望將風險控制在可忍受程度之下，找到一組權重能使得投資組合有最大期望報酬，傳統衡量風險方法中，變異數和平均絕對離差法皆只考量整體的平均離散程度，卻忽略極端值的發生；風險值、條件風險值和最小順序統計量等方法，其著重於尾部損失，卻忽略整體的風險。本文提出一個新的風險衡量指標-風險加權法，希望此新的風險衡量指標兼具兩種不同衡量風險的特性，一方面考慮整體的風險另一方面考慮尾部損失發生的可能性，避免金融市場又有大波動時造成的過度損失。本文建立了一個比較的基準，來探討新的風險衡量指標與傳統風險衡量指標應用於投資組合表現的差異性，根據實證結果顯示:本文所提出新的風險衡量指標-風險加權法在不同的風險忍受程度下，不管在平穩時期或是金融海嘯時期，實際持有投資組合時，其平均報酬的表現與其他傳統風險衡量指標比較起來，並不會是最好的，但也不會是最差的能維持在一定的水準，不同的傳統風險衡量指標會隨著景氣的變化而變動很大，但風險加權法屬於一個穩健的風險衡量指標。

關鍵詞：投資組合、變異數、風險值、條件風險值、最小順序統計量、風險加權

Abstract

"Risk Management" has become a vital topic. Since the occurrences of risks cannot be respectively pinpointed, we would like to construct robust risk measurement methods to keep risks within tolerable levels, while yielding maximum expected returns. Using traditional methods of risks measurements, variance and mean absolute deviation only take the overall discrete degree into consideration, but does not take occurrences of outlier and extreme values into account. Methods such as Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk and Minimum stress the importance of expected tail loss, at the expensive of the overall risks. The purpose of this paper is to propose a new risk management index, Risk-weighted method. This method will incorporate two orientation for assessing risks: to evaluate overall risks while taking the possibility of expected tail loss into consideration and to avoid losses caused by major disruption in financial market, guaranteeing certain degree of expected returns at identical risk conditions.

Key words: Portfolio, Variance, Value-at-Risk, Conditional Value-at-Risk, Risk-weight

壹、前言

一、研究背景與動機

隨著金融市場的蓬勃發展，金融商品也不斷地多元化，所以投資人希望能有一個完善的理財規劃得以獲取利益，然而一個完善的理財規劃就需要有好的風險管理。金融危機事件不斷發生，例如：金融海嘯與近期的歐債危機，許多銀行也都傳出有財務危機，進而影響整個市場價格也重挫了全球的金融市場，使得許多投資人損失慘重也讓投資人的信心瓦解。所以投資者也就更加關注風險管理的重要性，希望在這多變的金融市場裡，進行投資組合資產配置時不僅能得到最大報酬，也能將風險控管在某一個水準之下，以避免同樣的事件再次發生。但是，當投資人在做資產配置時，該如何衡量風險呢?而且每一個投資者對於風險可以忍受的態度也不盡相同，像是對於風險喜好者，它們願意在承擔較大的風險的條件下去追求投資組合能有較高的期望報酬，相對地，對於風險較爲保守者，他們比較不能接受風險的發生，只願意承擔較低的風險，所以他們只能得到較少的期望報酬。因此每一個投資人都該選擇一個適合自己的風險指標(Risk measure)，以作爲衡量風險的參考再進行投資組合的最佳資產配置。傳統衡量風險方法中，變異

數和平均絕對離差法皆只考量整體的平均離散程度，卻忽略極端值的發生；風險值、條件風險值和最小順序統計量等方法，其著重於尾部損失，卻忽略整體的風險。本文中提出一個新的衡量風險方法-風險加權法與希望此新的風險衡量指標兼具兩種不同衡量風險的特性，一方面考慮整體的風險另一方面考慮尾部損失發生的可能性，避免金融市場又有大波動時造成的過度損失。我們將要比較這些方法運用在投資組合資產配置時表現的差異。

二、論文架構

在本篇研究中，我們將介紹六個風險衡量指標：變異數、絕對平均離差、風險值、條件風險值、最小順序統計量與本文所提出的新方法-風險加權法，其將各等級風險加權，利用線性規劃限制風險在一定的水準下找出投資組合的最適配置比例使得其投資組合有最大的期望報酬，並從 NIKE 運動服飾、 星巴克公司，美國蘋果公司，鴻海科技集團，株式會社日立製作所與 sigma 生技公司，五種不同類產業的股票作爲投資標的最爲實證分析。本文章 主要架構敘述如下：第一節緒論，介紹研究背景、動機及研究目的；第二章爲文獻回顧-第一節爲介紹投資組合理論，第二節介紹平均絕對離差，第三節介紹風險值，第四節介紹最小順序統計量：第三章爲介紹研究方法與如何比較風險衡量指標間的不同：第四章爲實證分析，其包含說明了資料來源與結果：最後第五章提出結論。

貳、文獻回顧

近來金融環境的不斷地變化，風險管理也越趨重要，不僅業界發展許多風險衡量指標，學術界也越來越多的文獻在探討各種風險衡量指標的性質，本章將從文獻中探討一些傳統的風險衡量指標，例如：變異數、平均絕對離差、風險值、條件風險值和最小順序統計量，我們將要介紹這些風險衡量指標的性質以及估計方法，並比較這些風險衡量指標應用在投資組合上的表現，除此之外，我們也將探討這些風險衡量指標之間的相關性。

一、投資組合理論(Markowitz's Mean-Variance Model)

Markowitz (1952)提出了一個投資組合理論，該理論是在探討投資組合中風險(也就是變異數或標準差)與期望值之間的關係，變異數或是標準差被當作一個風險衡量指標，假如有 N 個投資標的在時間 T 期間內有著不同權重配置的投資組合，在給定相同變異數或是標準差的條件之下，找出有最大期望報酬的投資組合，或是給定期望報酬相同的條件之下，找出有變異數或標準差最小的投資組合，這些投資組合即爲效率投資組合，他們有著最適的資產配置。

假設持有 N 個投資標的在某一段期間 T，下面爲投資理論組合模型:

$$\text{Max} \quad R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i$$

$$\text{Subject to} \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i (R_{i,t} - r_i)\right)^2 \le L \qquad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \ge 0 \quad i = 1,2,\dots,N$$

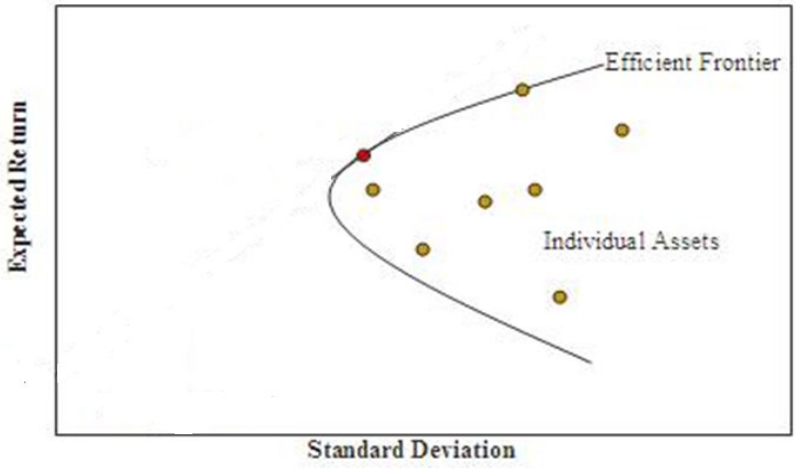
其中 $R_{i,t}$: 第 i 個資產在時間 t 時的報酬

$r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1} R_{i,t}$:第 i 個資產的期望報酬

w_i: 投資組合第 i 個資產的權重

此投資組合理論以變異數或標準差來衡量風險高低，因爲其具有對稱性，所以如有較大型的投資組合損失會使變異數和標準差增加外，相對地如有較大的投資組合收益也會導致變異數和標準差增加，且較大的投資組合也會造成計算上的困難，因此可能有失精確。

(2.1)式爲限制變異數在某個水準 L 以下且假設投資標的之間爲獨立，投資在每一個資產的權重相加等於一條件之下，不允許持有短部位的行爲發生，希望找到一組權重能使其投資組合有最大的報酬R_p。利用線性規劃的方法，在給定風險在某一水準L_1下，可以找到一組投資組合權重w_1，有最適投資組合報酬R_{p1}且對應地計算出最適投資組合標準差σ_{p1}，因此在一系列不同的水準 L 下，可以找到一系列的最佳投資組合權重 w，有著一系列的最適投資組合報酬R_p對應一系列最適投資組合標準差σ_p。我們將這些R_p與σ_p畫在座標平面上，將標準差當作橫軸，將期望報酬當作縱軸，則畫出一條效率前緣(efficient frontier)，在這效率前緣上的投資組合稱爲效率投資組合。



圖一 效率前緣圖

二、平均絕對離差(Mean Absolute Deviation)

Konno and Yamazaki (1991) 提出了另外一個方法，他們把平均絕對誤差當作風險衡量指標，這個方法是來處理投資組合理論模型如有大型的投資組合所帶來的計算困難。

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

$$\text{Subject to} \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{n} w_i \left(R_{i,t} - r_i\right) \right| \le L \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \ge 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

其中 $R_{i,t}$: 第 i 個資產在時間 t 時的報酬

$r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1} R_{i,t}$:第 i 個資產的期望報酬

w_i: 投資組合第 i 個資產的權重

(2.2)式爲限制平均絕對離散(風險)在某個水準 L 以下與權重相加等於一的條件之下，且不允許持有短部位的行爲發生，希望找到一組權重能使其投資組合有最大的報酬。

三、風險值

(一)風險值的定義

風險值(Value-at-Risk)，簡稱 VaR，也是一種風險衡量指標，Jorion (1997)在「Value at Risk」一書中，對風險值的定義爲「在正常的市場情況與給定一信賴水準(1-β)之下， 衡量資產在特定時間(T)內可能面臨的最大預期損失」，它的表示方式可以是損失金額，也可以是損失的百分比。用數學式表達如下:

$$\Pr(\Delta w \le \text{VaR}) = 1 - \beta$$

其中 Δw: 投資組合損益，正值代表收益，負值代表損失

β: 信賴水準，$0 < \beta < 1$

信賴水準(1-β)和估計期間 T 視估計目的而定，大部分的金融機構皆使用一日風險值及 95%~99%的信賴水準。

VaR 亦有其他的定義方式，我們根據 Rockafellar and Uryasev (2000)，假設一投資組合有 n 個資產:

x:代表投資組合各資產的權重$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Re^n$。

y:代表未來有 m 種不確定的狀態$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \Re^m$。

f(x,y):代表某一種權重 x 的投資組合在未來不確定的狀態下的投資組合損失。

p(y):代表任一權重 x 的投資組合，在未來不確定的狀態下會形成一損失分配，則

對此一投資組合 x，在未來投資組合損失 f(x,y)不會超過任一門檻值(threshold value) α 的累積機率可以表示爲$\psi(x,\alpha)$，其數學式表達如下:

$$\psi(x,\alpha) = \int_{f(x,y)\le\alpha} p(y)dy \qquad (2.3)$$

利用投資組合損失的累積機率$\psi(x,\alpha)$，投資組合 x 在給定信賴水準β下的風險值，以符號$\alpha(x,\beta)$來表示，其數學式表達如下：

$$\mathrm{VaR}_\beta(x) = \alpha(x,\beta) = \min\{\alpha \in \Re: \psi(x,\alpha) \ge \beta\} \qquad (2.4)$$

(二)條件風險值

條件風險值(conditional Value-at-Risk)，簡稱 CVaR，又稱作平均超額損失(Mean Excess Loss)、平均超額(Mean Shortfall)或尾部風險直(Tail VaR)等名稱，在給定信賴水準β下的風險值爲$\alpha(x,\beta) = \min\{\alpha \in \Re: \psi(x,\alpha) \ge \beta\}$ ，則在信賴水準β下的條件風險值，以$\emptyset(x)$來表示，Rockafellar and Uryasev (2000)將其定義爲「一服從連續型分配的投資組合，在給定信賴水準下，其尾端機率區間內可能發生的平均損失」，換句話說，條件風險值即爲「給定投資組合損失超過風險值的條件下的期望值」，可顯示出一旦投資組合發生尾端事件時的損失程度。條件風險值可以表示如下：

$$\emptyset(x) = \mathrm{E}(X|X > \mathrm{VaR}_\beta(x)) \qquad (2.8)$$

其中$X > \mathrm{VaR}_\beta(x)$ 表示損失大於風險值，由(2.8)可知，條件風險值可表示爲：

$$\emptyset(x) = (1-\beta)^{-1}\int_{f(x,y)\ge\alpha(x,\beta)} f(x,y)p(y)dy \qquad (2.9)$$

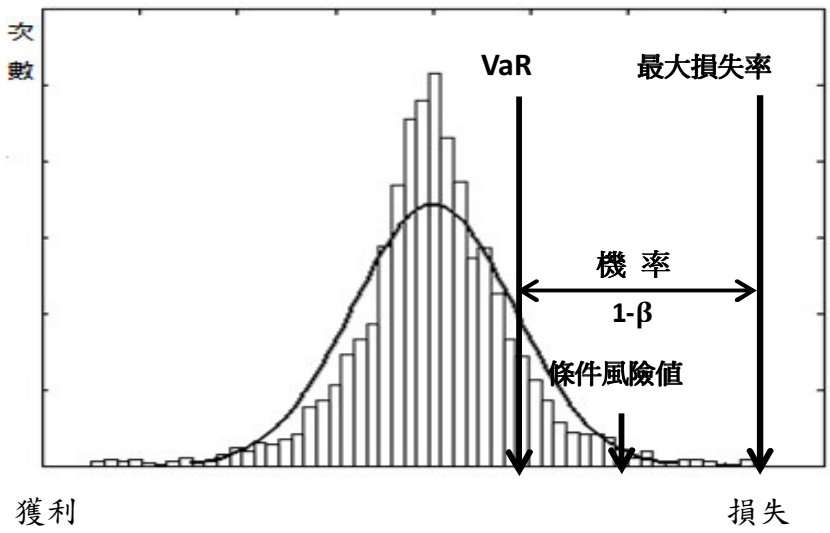
在 Rockafellar and Uryasev (2000)中證明了最小化條件風險值函數在$x \subset \Re^n$上可以寫爲以下式子：

$$\emptyset(x) = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)}\int_{y\in\Re^m}(f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \alpha)^+ p(y)dy \qquad (2.10)$$

其中 α: VaR ； β :給定的信賴水準

f(x ,y):投資組合 x 在 y 狀態下的損失

p(y):投資組合損失機率分配



圖二 風險值與條件風險值

四、最小順序統計量

Young(1998)使用了最小化報酬來衡量風險而不是用標準差，他希望投資者能減少最大損失的可能，當金融市場發生嚴重的損失則不會使得投資者損失太多的金錢。所以此方法相對來說也是一個比較嚴格的風險衡量指標，因爲比較不能接受損失的發生，希望控制最小損失在某一水準之上，因此 Young 的投資組合選擇規則是最小化所有過去期間的最大損失，也就是說給定報酬在一個限制 G 之上，然而這個限制爲最小報酬必須高過過去期間所有最小平均報酬。這個最小化投資組合選擇規則可以避免像是 mean-variance 的二次效用函數非單調的性質與如有大量的報酬二次函數與共變數矩陣的計算難度。其最小最大化投資組合線性規劃的式子如下:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & R_p \\ \text{Subject to} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i R_{i,t} - \min \sum_{i=1}^{n} w_i R_{i,t} \geq 0 \ \text{,t=1,…,T} \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i r_i \geq G \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i \leq W \\ & w_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,n \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $R_p = \min \sum_{i=1}^{n} w_i R_{i,t}$:投資組合最小報酬

$r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$:第 i 個資產的在 T 期間內的期望報酬

$R_{i,t}$ ： 第 i 個資產在時間 t 時的報酬

w_i: 投資組合第 i 個資產的權重

以上的(2.10)式是希望能找到最大化最小期望報酬或是找到最小化最大期望損失，且投資組合報酬必須比過去期間每個時間點最小的投資報酬還要大，然而相同等價的線性規劃式子也可以改寫成找到最大的投資組合期望報酬，給定投資組合報酬在某些門檻值之上。其式子如下:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \\ \text{Subject to} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i R_{i,t} \geq L \qquad t=1,2,3,\dots,T \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i \leq W \\ & w_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,n \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$ ： 第 i 個資產的期望報酬

$R_{i,t}$ ： 第 i 個資產在時間 t 時的報酬

參、研究方法

一、 風險加權法

大部分的人會使用平均-變異數(mean-variance)模型來當作風險衡量指標，但是變異數與平均值離差法少考慮了尾部損失的影響，雖然尾部損失發生的機率很小，但是一旦發生則會帶來嚴重的損失，像是雷曼兄弟事件，他們是信評很好的公司，所以投資人大量地投資在他們公司，像是 2007~2009 的金融海嘯事件進而影響了雷曼兄弟公司，所以造成許多人投資失利，於是每個投資人就開始關注極端值發生的可能，改用了風險值(Value at Risk)與條件風險值(Conditional Value at Risk)或是最小順序統計量($x_{(1)}$)來估計極端值，防範尾部損失的發生，但是這些風險衡量指標又太過於注重尾部與極端值。

於是本文利用信用評等公司把公司信用程度分等級的概念，我們也將風險損失的部份分等級，每一個等級都佔有一個比例，所以其爲一個較廣義的風險衡量指標的概念，希望包含傳統風險衡量指標的兩個優點，本文是以一倍標準差、 二倍標準差、三倍標準差和四倍標準差當作損失的不同等級，每一個等級佔有一個條件機率，將其相乘之後成爲一個新的風險衡量指標值，再利用線性規劃的方法，找出一適當的權重使得投資組合有最大的報酬。

我們也可以依據投資人對於風險忍受程度的不同，來調整每一個等級所佔的比例，因爲每個投資人對於可以忍受損失的金額大小不同，像前面章節所提到 Young(1998)所提出的最小順序統計量法，相對地來說就是一個比較嚴格的風險衡量指標，其對於最小的報酬都要控制在某一個水準之上，所以對於不同的損失程度，所投資的比例可以依照投資人不同的風險態度，如果投資人對於損失的忍受度較低，可以將四倍標準差所佔的比例相對調高一點；如果投資人對於損失的忍受度較高，則可以將四倍標準差所佔的比例相對調低一點，所以此風險衡量指標可以考慮每個情況發生的機率，也像是利用每一個傳統風險衡量指標當作一個等級來做加權平均，本文提出了兩種情況，其公式如下：

方法 1　依不同等級所佔的比例

雖然損失慘重的發生在整個損失分配來說佔的比例很小，我們利用條件機率的概念，如果只看整個尾部損失發生的機率，則損失慘重的機率佔其整個尾部損失發生機率就會相對地提高，所以此情況是利用一倍標準差、 二倍標準差、三倍標準差和四倍標準差當作不同等級，每一等級所占的比率的不同相乘之後成爲一個新的風險衡量值，再利用線性規劃的概念，將風險控制在一水準下，找出一適當的資產權重，使得投資組合有最大的報酬，其公式如下：

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i r_i$$

$$\text{Subject to}$$

$$\frac{P(R_p \le -4\sigma)}{P(R_p \le -\sigma)} \cdot (-4\sigma) + \frac{P(-4\sigma \le R_p \le -3\sigma)}{P(R_p \le -\sigma)} \cdot (-3\sigma) + \frac{P(-3\sigma \le R_p \le -2\sigma)}{P(R_p \le -\sigma)} \cdot (-2\sigma) + \frac{P(-2\sigma \le R_p \le -\sigma)}{P(R_p \le -\sigma)} \cdot (-\sigma) \le L \qquad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,N$$

其中 $r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1} R_{i,t}$:第 i 個資產的期望報酬

計算每一時間投資組合的報酬$(R_{p_1}, R_{p_2}, \dots, R_{p_T})$之式子如下:

$$R_{p1}=w_1R_{1,1} + w_2R_{2,1}+\dots+w_NR_{N,1}$$
$$R_{p2}=w_1R_{1,2} + w_2R_{2,2}+\dots+w_NR_{N,2}$$
$$\vdots$$
$$R_{pT}=w_1R_{1,T} + w_2R_{2,T}+\dots+w_NR_{N,T}$$

方法 2　投資人對於損失極端值的重視程度較高

如果投資人對於損失極端值的重視程度較高,我們可以將損失極端值所佔的比例提高,我們利用等級的值佔所有等級的值當作一個新的比例,所以四倍標準差所佔的比例相對地就會提高,三倍、兩倍與一倍標準差所佔的比例也是依照此概念,其線性規劃公式如下:

Max $\sum_{i=1}^{N} w_i r_i$

Subject to

$$\frac{-4\sigma}{(-4-3-2-1)\sigma}\cdot(-4\sigma) + \frac{-3\sigma}{(-4-3-2-1)\sigma}\cdot(-3\sigma) + \frac{-2\sigma}{(-4-3-2-1)\sigma}\cdot(-2\sigma) + \frac{-\sigma}{(-4-3-2-1)\sigma}\cdot(-\sigma) \leq L \qquad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,N$$

其中$r_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-1} R_{i,t}$:第 i 個資產的期望報酬

計算每一時間投資組合的報酬$(R_{p_1}, R_{p_2}, \dots, R_{p_T})$之式子如下:

$$R_{p1}=w_1R_{1,1} + w_2R_{2,1}+\dots+w_NR_{N,1}$$
$$R_{p2}=w_1R_{1,2} + w_2R_{2,2}+\dots+w_NR_{N,2}$$
$$\vdots$$
$$R_{pT}=w_1R_{1,T} + w_2R_{2,T}+\dots+w_NR_{N,T}$$

二、 風險衡量指標之比較標準

在本文中,分別使用了變異數、平均絕對離差、風險值、條件風險值與最小順序統計量作爲風險衡量指標,來衡量投資人投資組合風險的高低,所以依投資人對於風險忍受程度的高低,將風險控制在某一水準之下,希望能找到投資組合最大的報酬,所以我們設立一個比較基準來比較不同風險衡量指標間的差異性及其應用在投資組合上表現的差異。

舉例來說,假設有 N 個資產,比較風險加權法與最小順序統計量方法應用於投資組合上的差異,利用風險加權法當作風險衡量指標,將風險控制在不同水準$(L_1, \dots, L_n)$之下能找到 n 組權重與 n 組最佳投資組合報酬$(R_1, \dots, R_n)$及計算出 n 組風險加權值$(n_1, \dots, n_n)$;利用最小順序統計量當作風險衡量指標,將風險控制在不同水準$G_1,\dots,G_n$之下能找到 n 組權重與 n 個投資組合報酬率$r_1,\dots,r_n$及計算出 n 組最小順序統計量$(o_1, \dots, o_n)$,所以每個風險衡量指標可以找到一效用函數,爲凸函數且漸漸上升,我們利用每個效用函數每增加一單位風險,而報酬上升趨勢爲一致的或相似之處,所以我們要找差距最小之處,其公式如下:

$$\min\left|\frac{R_{j+1}-R_j}{n_{j+1}-n_j} - \frac{r_{i+1}-r_i}{o_{i+1}-o_i}\right|,\ j=1, 2, \dots, n,\quad i=1, 2, \dots, n \qquad (3.8)$$

找出風險加權法與最小順序統計量法之間，每增加一單位風險所增加報酬的比例相似處，也就是找出每增加一單位風險報酬增加速度相同之處，作爲不同風險衡量指標間相同的衡量水準，再以所找出的投資組合的風險加權值與最小順序統計量當作風險衡量水準再做一次線性規劃，分別找出適當的投資組合權重使得投資組合有最大報酬，並比較不同風險衡量指標之間所得到的報酬，就可以知道不同風險衡量指標之間的差異。

三、報酬與風險衡量指標之關係

(一)報酬率與風險值及條件風險值之關係

報酬-變異數模型，是假設在期望報酬與變異數爲獨立的假設之下，所以我們也想知道其他風險衡量指標與報酬之間的相關性，我們引用了侯怜竹(2009)論文中 3.2.4 節所推導出風險值與報酬不爲獨立，其關係式如下：

假設對數-報酬r_t服從常態分配，其機率函數爲：

$$f(r_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(r_t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中μ爲對數-報酬的期望值，σ爲對數-報酬的標準差

則投資組合累積分配函數α時的分位數，計算如下:

$$VaR=\mu-\sigma Z_\alpha$$

假設信賴水準爲 95%，我們可以得到下列式子：

$$\begin{bmatrix}\text{mean}\\ \text{VaR}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu\\ \mu-1.645\sigma\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1.645\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu\\ \sigma\end{bmatrix}$$

$$=A\begin{bmatrix}\mu\\ \sigma\end{bmatrix}\qquad \left(A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1.645\end{bmatrix}\right)$$

其反矩陣爲:

$$\begin{bmatrix}\text{Mean}\\ \text{standard deviation}\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}\text{mean}\\ \text{VaR}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{1.645}\begin{bmatrix}-1.645 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{mean}\\ \text{VaR}\end{bmatrix}$$

藉由餘弦定理，我們可以知道平均報酬與風險值的關係，其計算如下:

$$\text{Cos}\theta=\frac{(1\ 1)(0-1.645)}{\sqrt{2}\sqrt{1.645^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\therefore\theta=135^\circ$$

所以從上列的式子，我們可以知道在常態分配假設下，在任何信賴水準之下，其報酬與風險值的夾角爲135°，因此風險值乘以$\cos 45^\circ$後則與報酬獨立。

同理，引用 James X. Xiong 和 Thomas Idzorek(2010)，我們可以知道，在常態假設下，信賴水準爲 95%，則條件風險值與報酬之關係如下：

$$CVaR=\mu-2.06\sigma$$

所以，在任何的信賴水準之下報酬與條件風險值的夾角也爲135°，因此條件風險值乘以$\cos 45^\circ$後則與報酬獨立。

- **正交化後的效率前緣**

藉由前面所得到報酬與風險值之夾角爲135°，利用分解向量的概念，我們將風險值分成水平向量與垂直向量，分別爲$VaR*\cos 45^\circ$與$VaR*\sin 45^\circ$，所以正交化後的座標爲下列：

$$X^* = X * \cos 45^\circ$$
$$Y^* = X * \sin 45^\circ + Y$$

其中X^*:正交化後的風險值　X:原本的風險值

Y^*:正交化後的報酬值　Y:原本的報酬值

同理，條件風險值也可以寫成上列的式子。

圖三與圖四以風險值爲風險衡量指標爲例，在信賴水準爲 95%下的效率前緣圖，可看出正交話前後的差異。

- 風險值-信賴水準爲 95%

圖 三 原本的效率前圖

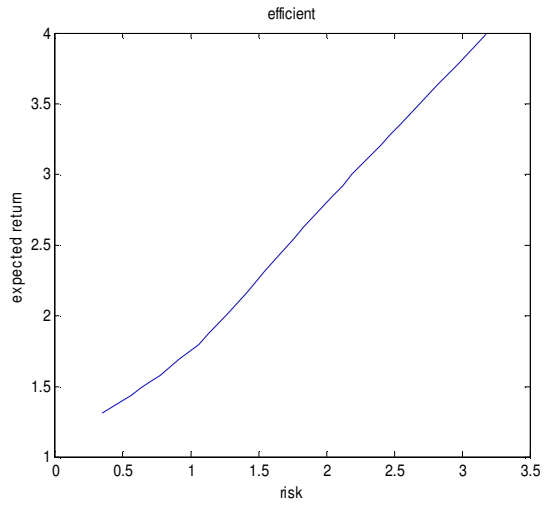
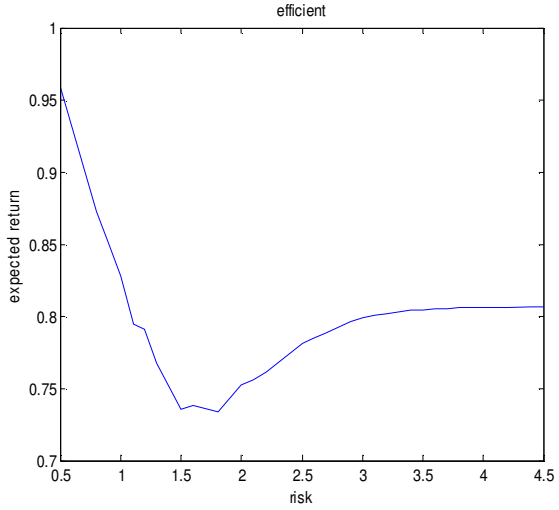


圖 四 正交化後的效率前緣圖



(二)報酬率與最小順序統計量之關係

利用模擬的方式，假設報酬r_t爲常態分配，其中平均數爲 0，標準差爲 1，其步驟如下:

步驟 1:每次生成 10 筆報酬，算出其平均報酬與最小值，重複 10 次，並利用餘弦定理，計算平均報酬與最小值的夾角

步驟 2:重複步驟 1 的計算 1000 次，可得到 1000 筆角度，再算出其平均角度

經由上列的步驟，我們可以計算出報酬與最小順序統計量的夾角爲80°，所以最小順序統計量乘以$\cos 10^\circ$，則報酬與最小順序統量爲獨立。

同理，利用向量分解合成的方法，可將正交化後的最小統計量寫爲下列式子：

$$X^* = X * \cos 10^\circ$$
$$Y^* = X * \sin 10^\circ + Y$$

其中X^*:正交化後的最小順序統計量　X:原本的最小順序統計量

Y^*:正交化後的報酬值　Y:原本的報酬值

圖五與圖六以最小值爲風險衡量指標爲例的效率前緣圖，可看出正交話前後的差異。

- **最小值與報酬之效率前緣圖**

圖 五 原本的效率前緣圖

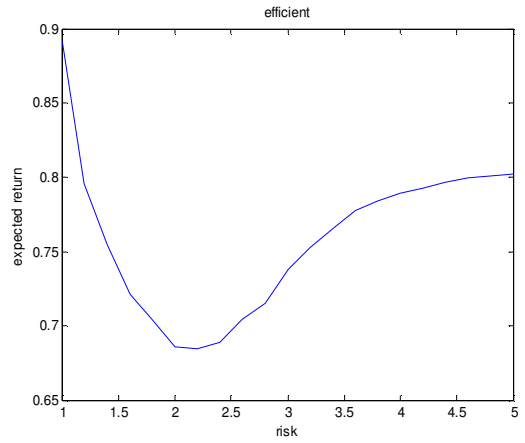
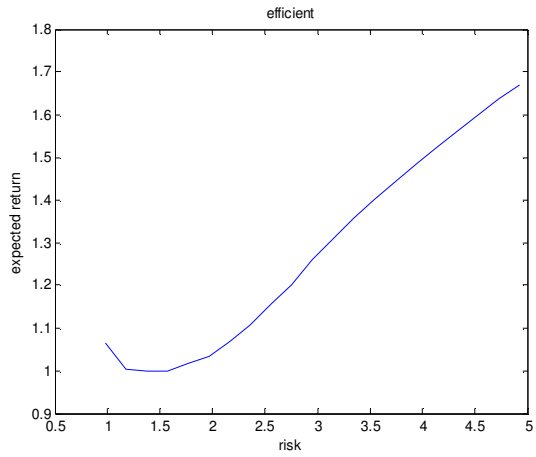


圖 六 正交化後的效率前緣



肆、實證分析

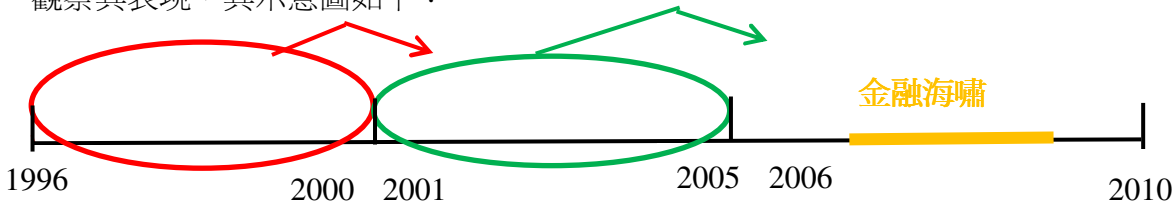
一、 資料來源

此文所要探討的是用不同風險衡量指標，依照投資人不同風險忍受度，找到一組權重使投資組合能有最大的報酬，投資的目的就是分散風險，所以本文考慮了六個不同產業類型的股票所組成的投資組合，其包含了 NIKE 服飾公司、星巴克咖啡公司、美國蘋果公司、鴻海科技集團、株式會社日立製作所與 Sigma 生技公司，分別代表了服飾業、餐飲業、科技業、傳統工業與生技業等類型，此文資料取樣時間爲 1996 年 1 月到 2010 年 12 月共十年的歷史價格，總共 180 個工作天，其中包含了金融海嘯期間 2007 年到 2009 年，全部資料都爲月資料的型態，所有的資料來源皆於美國雅虎財金網站(http://finance.yahoo.com)與台灣證交所。

本文以報酬率來估計各種風險值，所以我們將取得的原始資料價格型態轉爲報酬率的型態，以下爲本文採用的報酬率定義：$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$，其中$P_t$表資產在時間 t 的價格。

二、 實證分析

本文將資料每五年分爲一個階段，總共有三個階段分別爲 1996 年到 2000 年、2001 年到 2005 年與 2006 年到 2010 年，其中 2006 年到 2010 年還包括了 2007 年 12 月到 2009 年 6 月的金融海嘯時期，本文想觀察在平穩時期與金融海嘯時期，利用不同風險衡量指標所配適出來的權重持有在不同時期時表現的差異，所以本文分別利用 1995 年到 2000 年與 2001 年到 2005 年的歷史價格來當作資產配置，再分別持用在 2001 年到 2005 年與 2006 年到 2010 年這兩段期間，依不同方面來觀察其表現，其示意圖如下：



(一)各資產的敘述統計量與配置結果

✧ **1996~2000 各資產的敘述統計量**

利用 1996 年 1 月到 2000 年 12 月的歷史價格與 2001 年 1 月到 2005 年 12 月的歷史價格，用六個不同風險衡量指標去找出適當的資產配置使得投資組合有最大的報酬，並比較不同風險衡量指標之間應用於投資組合報酬與風險表現的差異。我們先看這段期間各資產的敘述統計量，其表如下：

表一 1996~2000 各資產的敘述統計量

	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
平均數	0.0177	**0.0354**	0.0161	0.0264	0.0042	0.0119
變異數	0.0168	0.0216	**0.0317**	0.0213	0.0116	0.0065
最小值	-0.3752	-0.3815	-0.5773	-0.2727	-0.2107	-0.2887
最大值	0.4037	0.3197	0.3963	0.3620	0.2926	0.1452
平均/標準差	0.1370	0.2405	0.0904	0.1806	0.0388	0.1467
夏普指數	0.0991	0.2072	0.0629	0.1470	-0.0067	0.0861

Sharpo ratio 的無風險利率適用各資產國家的長期債券去計算的

表二 1996~2000 各資產的相關性

	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
NIKE	1.0000					
星巴克	0.3197	1.0000				
蘋果	**-0.0908**	0.0353	1.0000			
鴻海	**-0.0403**	0.0616	0.1916	1.0000		
日立	**-0.0174**	0.0123	0.1698	0.2351	1.0000	
SIGMA	0.3556	0.1708	**-0.3808**	**-0.0736**	0.0570	1.0000

從 1996 年到 2000 年的歷史報酬率中，六個資產在此期間之敘述統計量可以從表一分析如下：以平均報酬率而言，以星巴克爲最高，其平均報酬率爲 0.0354，次高爲鴻海，其平均報酬率爲 0.0264；而平均報酬率最低者爲日本日立，其平均報酬率爲 0.0042。在變異數方面，以美國蘋果公司爲最高，其變異數爲 0.0317，次高者爲星巴克，其變異數爲 0.0216，所以星巴克算是一個高風險高報酬的股票；而變異數最低爲 SIGMA 生技公司，次低者爲日立，其變異數分別爲 0.0065 與 0.0116，所以日本日立爲一個低風險低報酬的股票。以夏普指數來看，指數越高代表此股票績效越好，每增加一單位風險可獲得的超額報酬越高，以星巴克爲最高，其指數爲 0.2072，次高者爲鴻海集團；而最低者爲日本日立公司，其指數爲 -0.0067，所以在相同的風險條件下，投資在日本日立公司還不如把錢存放在銀行定存中，所以這也影響了資產配置的比例，我們發現各個方法幾乎都不會把錢投資在日本日立公司中。表二爲各資產之間的相關性，可以發現美國蘋果與 SIGMA

生技公司的負相關性較高，此相關性也可以作爲一個資產配置時的考量。

✧ **1996~2000 各資產的配置結果**

表三 以變異數在不同風險忍受程度 L 下的個資產配置

L	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
0.003	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.5
0.004	0.1	0.2	0.1	0.2	0	0.4
0.005	0.1	0.3	0.1	0.2	0	0.3
0.006	0	0.4	0.1	0.2	0	0.3

表四 以平均絕對離差在不同風險忍受程度 L 下的個資產配置

L	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
0.045	0	0.2	0.1	0.2	0.1	0.4
0.05	0	0.3	0.1	0.2	0	0.4
0.055	0.1	0.4	0.1	0.1	0	0.3
0.06	0.1	0.4	0.1	0.2	0	0.2

表五 以風險值在不同風險忍受程度 L 下的個資產配置($\alpha = 95\%$)

L	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
0.05	0.2	0	0.2	0.1	0	0.5
0.06	0.1	0.1	0.1	0.2	0	0.5
0.07	0.1	0.1	0.1	0.3	0	0.4
0.08	0	0.3	0	0.3	0	0.4

表六 以條件風險值在不同風險忍受程度 L 下的個資產配置($\alpha = 95\%$)

L	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
0.1	0	0.2	0.1	0.3	0	0.4
0.11	0	0.2	0.1	0.4	0	0.3
0.12	0	0.2	0	0.5	0	0.3
0.13	0	0.3	0	0.4	0	0.3

表七 以最小順序統計量在不同風險忍受程度 L 下的個資產配置

L	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
0.1	0	0.2	0.3	0	0	0.5
0.11	0	0.1	0.1	0.3	0	0.5
0.12	0	0.3	0.3	0	0	0.4
0.13	0	0.3	0	0.2	0	0.5

表八 以風險加權法在不同風險忍受程度 L 下的個資產配置

L	NIKE	星巴克	蘋果	鴻海	日立	SIGMA
0.06	0	0.2	0.2	0.1	0	0.5
0.07	0	0.2	0.1	0.3	0	0.4
0.08	0	0.4	0.2	0.1	0	0.3
0.09	0	0.3	0	0.5	0	0.2

根據上面的表三到表八可以觀察到利用 1996 年到 2000 年的歷史資料，依據不同的風險衡量指標所配置的資產權重。大致上來看，以各資產權重的角度來分析，可以得知平均絕對離差模型與報酬-變異數模型較爲類似，而風險值、條件風險值、最小順序統計量模型所得出的結果也較爲類似，而風險加權法依風險等級調整的比例的不同造成結果上有些許不同。其中傳統風險衡量指標中分配權重的差異主要在 NIKE、美國蘋果與 SIKMA 生技公司，其比例權重上有些許的不同，NIKE、美國蘋果與 SIGMA 生技公司這三家公司，以平均報酬率角度來看，NIKE>美國蘋果>SIGMA 生技公司；以變異數角度來看，美國蘋果>NIKE>SIGMA 生技公司；以夏普指數來看 NIKE>SIGMA 生技公司>美國蘋果。因爲平均絕對離差模型與報酬-變異數模型較注重整體的離散程度，會把極端值給平均掉了，所以較不會投資於變異數較大的股票-美國蘋果上面；然而風險值、條件風險值、最小順序統計量較爲注重尾部極端值，所以比報酬-變異數模型多投資在美國蘋果上。因爲星巴克與鴻海爲平均報酬率較高的兩家公司，且其平均報酬率爲其他公司報酬的2~3倍，所以每個方法大致上都會投資在這兩家公司；以變異數來看，SIGMA 生技公司的變異數也較小，鴻海爲變異數第三高者，所以投資的比例在 SIGMA 公司還會比投資在鴻海的多；然而日本日立公司的平均報酬率爲最低，而且其夏普指數也會負的，所以每個風險衡量指標所配置出的權重幾乎都不會投資在這個股票上。

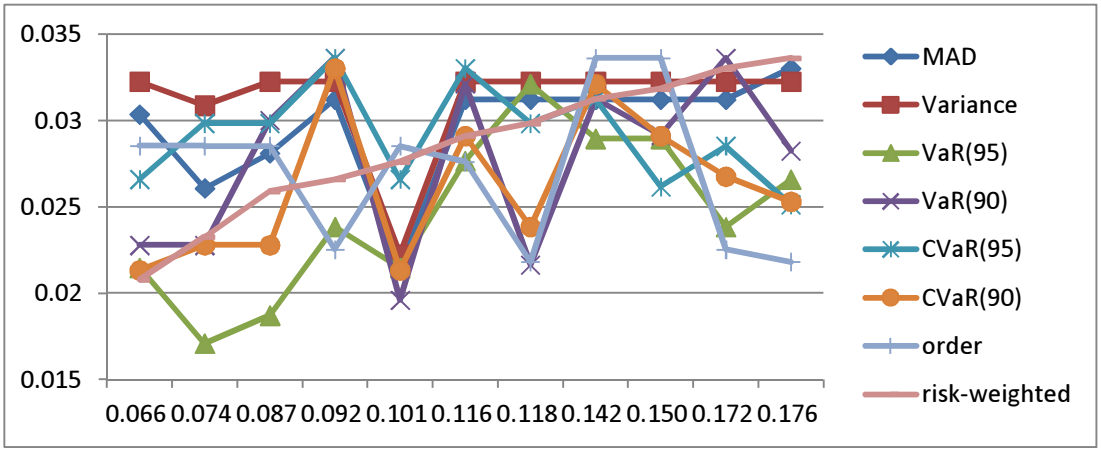
風險加權法則是依不同風險忍受程度而有不同的資產配置的比例，且依投資人對於損失可忍受的不同而調整的比例不同，所以配置結果也不會，如果比較重視尾部損失的投資者，將損失大的比例調高，配置結果可能會比較類似於注重尾部損失的方法，不過還是有些許的不同。

(二)不同風險衡量指標之比較(效率前緣)

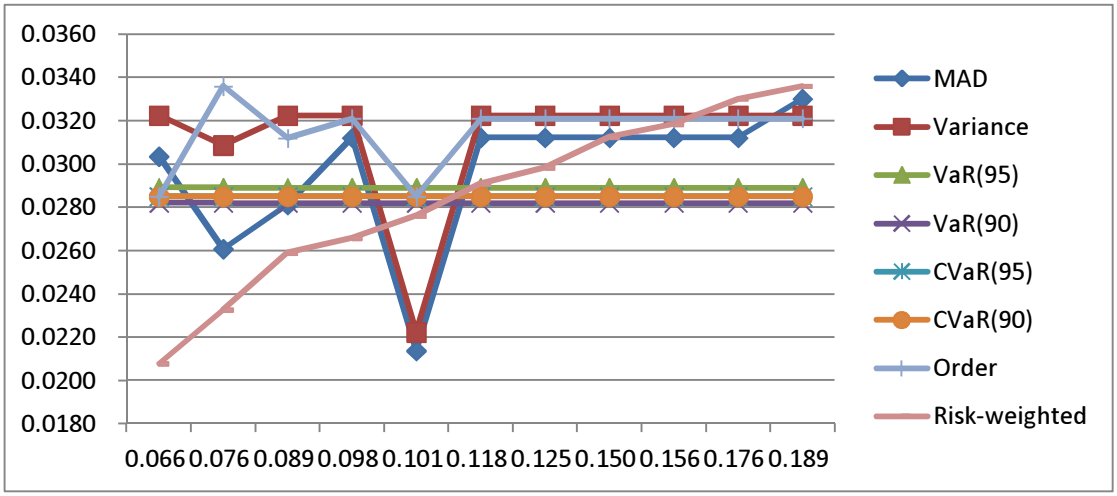
圖七與圖八爲 1996 年到 2000 年傳統風險衡量指標與風險加權法效率前緣之比較，沒有一個風險衡量指標在任何風險忍受程度下的報酬表現都是最好的，所以投資者可以隨著自身不同的風險忍受程度，選擇適合自己的風險衡量指標。

因爲實際的報酬每天是不同的，所以會發現不同風險衡量指標的報酬波動也很大，本文都是以風險加權法做爲比較的基準，我們從前面章節所提到的，風險值，條件風險值與最小順序統計量和報酬之間夾有一個角度，所以圖七與圖八將效率前緣圖分爲兩種狀況-正交前與正交化後來比較，以正交前來說傳統風險衡量指

標與風險加權法之效率前緣比較，從這兩張圖可觀察到在風險忍受程度較大時，分別是 0.172 與 0.12 以後，以風險加權法爲風險衡量指標，其投資組合報酬爲比較高；在其他風險忍受程度下，利用風險加權法爲風險衡量指標，其投資組合報酬不會比利用傳統風險衡量指標還要差，但也不會是最好的是趨於中間的，從這兩張圖也可以發現當信賴水準爲 95%時，用風險值爲風險衡量指標，其投資組合報酬是比較不好的；變異數與平均絕對離差大致上的表現還不錯，在風險忍受度爲 0.101 時會表現得比較差；以正交化後來說，可以觀察到風險值、條件風險值與風險加權法的關係，幾乎都在某一個風險忍受程度之後，利用風險加權法爲風險衡指標，其投資組合的報酬比較高，而最小順序統計量與風險加權法的關係，風險加權法的表現在風險加權法值爲 0.1555 之後才爲比較好。



圖七　1996~2000 傳統風險衡量指標與風險加權法之效率前緣(正交前)



圖八 1996~2000 傳統風險衡量指標與風險加權法之效率前緣(正交後)

(三)實際持有投資組合

情況 1 平穩時期

在資產配置上，每個模型投資在不同資產上的配置比例大致上很相似，所以本文利用第三章第三節所提到的比較基準，用於觀察不同風險衡量指標在相同的風險條件下，哪一個風險衡量指標所配置的資產實際持有會得到較大的報酬率。我們利用 1996 年 1 月到 2000 年 12 月總共五年的歷史價格，用六個不同風險衡量指標去找出適當的資產配置使得投資組合有最大的報酬，投資於 2001 年到 2006 年這段期間。下表爲比較不同風險衡量指標持有投資組合在這段期間的平均報酬與變異數之差異，其數據如下:

表九 以風險加權法爲比較標準，不同風險衡量指標在不同風險忍受程度下的敘述統計量

風險加權值		**MAD**	**Variance**	**VaR(95)**	**VaR(90)**	**CVaR(95)**	**CVaR(90)**	**Order**	**Risk-weighted**
0.0657	平均數	0.0166	0.0176	0.0182	0.0092	0.0135	0.0138	0.0111	0.0159
	變異數	0.0029	0.0044	0.0020	0.0024	0.0036	0.0019	0.0034	0.0014
	最小值	-0.1027	-0.1546	-0.0785	-0.0821	-0.1118	-0.0858	-0.1084	-0.0923
	最大值	0.1202	0.1345	0.1625	0.1905	0.2304	0.1531	0.2071	0.0929
0.1175	平均數	0.0157	0.0176	0.0120	0.0172	0.0187	0.0113	0.0095	0.0113
	變異數	0.0030	0.0044	0.0027	0.0034	0.0040	0.0036	0.0040	0.0036
	最小值	-0.1038	-0.1546	-0.0777	-0.1116	-0.1301	-0.1011	-0.1434	-0.1011
	最大值	0.1239	0.1345	0.1813	0.1299	0.1387	0.2208	0.2484	0.2208
0.1762	平均數	0.0157	0.0176	0.0117	0.0190	0.0111	0.0104	0.0241	0.0187
	變異數	0.0030	0.0044	0.0017	0.0045	0.0034	0.0032	0.0024	0.0040
	最小值	-0.1038	-0.1546	-0.0728	-0.1400	-0.1084	-0.1121	-0.1177	-0.1301
	最大值	0.1239	0.1345	0.1436	0.1434	0.2071	0.2226	0.1476	0.1387

從表五可以觀察的到在平穩時期，因爲此段期間的報酬較沒有太大的變動，所以用平均絕對離差法與變異數所配置出來的權重，應用於此段期間的表現，會比其他注重尾部損失的風險衡量指標-風險值、條件風險值與最小順序統計量所配置出來的權重，應用於此段期間所表現的平均報酬還要來的好，然而風險加權法所配置出來的權重，應用於此段期間相較於傳統的風險衡量指標，以平均報酬來說不是最好的但也不是最差，處於中間；以變異數來說，表現的情形也不是最大的但也不是最小的。

情況 2 金融海嘯時期 2007~2009

接下來我們想比較這些風險衡量指標對於 2007 年到 2009 年金融海嘯的發生會不會有好的預測或是哪個風險衡量指標所估出來的權重投資在金融海嘯期間會有太大的損失，因此本文利用了 2002 年 1 月到 2006 年 12 月總共五年的歷史

資料依不同風險衡量指標再做一次資產配置，再把所估出來的最適投資組合的權重帶入 2007 年 12 月到 2009 年 6 月金融海嘯期間的報酬率，觀察每個風險衡量之標應用於投資組合報酬與風險的變化。所以我們比較了不同風險衡量指標應用於投資組合平均報酬與風險的差異其實際數據如下：

表十 以風險加權法爲比較基準，不同風險衡量指標在不同風險忍受程度下的敘述統計量

風險加權值		**MAD**	**Variance**	**VaR(95)**	**VaR(90)**	**CVaR(95)**	**CVaR(90)**	**Order**	**Risk-weighted**
0.0499	平均數	-0.0036	-0.0033	-0.0086	-0.0019	-0.0014	-0.0061	0.0003	-0.0015
	變異數	0.0083	0.0156	0.0095	0.0079	0.0082	0.0081	0.0093	0.0070
	最小值	-0.2300	-0.2822	-0.2367	-0.2151	-0.2233	-0.2250	-0.2284	-0.2033
	最大值	0.1764	0.2171	0.1745	0.1776	0.1723	0.1777	0.1772	0.1687
0.0871	平均數	-0.0054	-0.0033	-0.0075	-0.0015	-0.0047	-0.0040	0.0000	-0.0004
	變異數	0.0158	0.0156	0.0079	0.0175	0.0122	0.0094	0.0105	0.0119
	最小值	-0.2889	-0.2822	-0.2282	-0.2873	-0.2653	-0.2418	-0.2402	-0.2520
	最大值	0.2211	0.2171	0.1675	0.2220	0.2032	0.1853	0.1862	0.1951
0.1182	平均數	-0.0057	-0.0033	-0.0014	-0.0086	-0.0043	-0.0014	-0.0025	-0.0033
	變異數	0.0085	0.0156	0.0082	0.0115	0.0107	0.0082	0.0120	0.0156
	最小值	-0.2367	-0.2822	-0.2233	-0.2669	-0.2535	-0.2233	-0.2586	-0.2822
	最大值	0.1804	0.2171	0.1723	0.2024	0.1943	0.1723	0.1992	0.2171

從表六可以觀察出來其與表五的差異，因爲金融海嘯期間報酬的變動較大，所以平均絕對離差與變異數較不能預防較大的損失，所以得到的平均報酬較沒有注重尾部損失的風險衡量指標-風險值、條件風險值與最小順序統計量還要來的好，且變異數的變動也較大，利用風險加權法所配置出來的權重，應用於此金融海嘯期間的平均報酬也是介於中間值，不是最大的也不是最小的，以變異數來說也不是最大的也不是最小的。

伍、 結論

經過前面文章的探討，發現投資人如何選擇一個合適的風險衡量指標，是很重要的問題，所以根據結果顯示我們可以得到以下的結論：

在任何情況下或是投資人對於風險忍受度的不同，在不允許短部位的條件下，使用風險加權法當作風險衡量指標時，得到的投資組合的平均報酬都可以保持在一個水平之上，遇到金融海嘯期間時，估計出來的權重實際持有在金融海嘯期間，使得整段期間的平均報酬也不是最低的，而且投資組合的變異數也是趨於中間，不是最大也不是最小的；在允許短部位的條件下，會發現在投資人對於風險忍受

程度中高時，其實際投資一段期間後的平均報酬與變異數才會維持在一個水準之上。

參考文獻

[1] Franklin, J.N. (2002).Method of Mathematical Economics: Linear and Nonlinear Programming Fixed-Point Theorems, Springer, New York.

[2] Helmut Mausser and Dan Rosen. (1999):"Applying Scenario Optimization to Portfolio Credit Risk", *ALGO Res.Quart* 2

[3] Helmut Mausser and Dan Rosen. (2000):"Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion", *Mathematics Subject Classification*

[4] James X. Xiong and Thomas Idzorek. (2010). "Mean-Variance Versus Mean-Conditional Value-at-Risk Optimization: The Impact of Incorporating Fat Tails and Skewness into the Asset Allocation Decision", *The Journal of Risk*

[5] J. E. Ingersoll. (1987)." Theory of Financial Decision Making", Rowman & Littlefield Publishers

[6] Jorion, P. (1997). "Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk.", Irwin, New York.

[7] Kolman, Bernard, and Robert E. Beck. (1995). " Elementary linear programming with applications", Academic Press, San Diego.

[8] Martin R.Young. (1998). "A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Selection", *Management Science*, 44(5): 673-683.

[9] Markowitz, H. (1952). "Portfolio Selection", *The Journal of Finance,* 7(1): 77-91.

[10] Markowitz, H. (1959). "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment." Wiley, New York.

[11] Robert J. Vanderbei. (1996). "Linear Programming: Foundations and Extensions", Kluwer Academic.

[12] Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000). " Optimization of Conditional Value-at-Risk." *Journal of Risk*, 2:21–41.

[13]周行一 (2000). 投資學的世界，天下遠見。

[14]周大慶，沈大白，張大成，敬永康，柯瓊鳳 (2007). 風險管理新標竿-風險值理論與應用第二版，智勝。

[15]劉漢威 (2004). 財金風險管理理論.應用與發展趨勢，智勝。

[16]侯怜竹 (2009). 一個新風險值估計式及其對資產配置決策的影響。