

台灣公債市場之利率期限結構估計 - Nelson and Siegel 模型家族之比較

周建新

國立高雄第一科技大學財務管理系

于鴻福

國立虎尾技術學院工業管理系

鍾韻琳

國立高雄第一科技大學財務管理系

摘要

利率期限結構是指在相同違約風險水準下，各期零息債券之殖利率曲線。本研究以 Nelson-Siegel 模型、Extend Nelson-Siegel 模型與 Nelson-Siegel-Svensson 模型，利用修正高斯-牛頓法來估計模型參數，藉以建構台灣公債市場之利率期限結構。Nelson-Siegel Model、Extend Nelson-Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 之最大優點在於能用少數之參數，即可有效地捕捉利率期限結構之變化，且此三模型之參數也具有經濟意義，只須由參數之正負值，即可判讀利率期限結構之形狀。經由實證結果發現：(一)三種模型的配適能力均高於 90% 以上，顯示此三種模型，在台灣公債市場配適能力之優越性；(二) Nelson-Siegel-Svensson model 之配適能力，優於 Extend Nelson-Siegel Model；Extend Nelson-Siegel Model 又優於傳統使用之 Nelson-Siegel Model，顯示多增加一個參數，可以更有效地捕捉到利率期限結構之變化。

關鍵字：利率期限結構、修正高斯-牛頓法、Nelson-Siegel 模型、Extend Nelson-Siegel 模型與 Nelson-Siegel-Svensson 模型

壹、緒論

利率期限結構是指在相同違約風險水準下，各期零息債券之殖利率曲線。利率期限結構除可以評價市場上所流通無風險的政府債券外，還可以用來計算一般公司債所隱含之風險貼水(premium)，因此在金融市場中，分析利率期間結構的變化，便成為十分重要的研究主題。隨著國際金融市場的多元化、自由化與國際化，金融創新造成新金融商品的大量問世，而這些新金融商品的設計與評價，皆與利率變化息息相關，因此如何掌握利率變化趨勢，運用於投資決策、預測未來利率走勢，及有效管理利率風險，皆顯示如何有效建構利率期限結構的重要性。

利率期限結構的估計模型基本上可分為均衡模型(equilibrium models)與實証模型(empirical models)二大類。均衡模型(equilibrium models)主要的出發點在假設某些經濟變數，服從某一隨機過程，進而推導出理論的利率期間結構；但由於推導出來的殖利率曲線在形狀上都有特定的限制，且參數的設定不易，所以常會造成理論價格與實際價格有所差異；均衡模型的代表學者有 Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan and Schwartz (1979), Cox et al. (1985a,b)等。實証模型(empirical models)則是利用曲線配適技術，以觀察到的政府付息公債價格來估計即期收益率曲線，也就是零息公債的收益率曲線。實証模型是強調利用實際觀察的資料，如何最佳描繪利率期限結構的多變性，而此一模型的研究成果包括 McCulloch (1971), Carleton and Cooper (1976), Schaefer (1981), Steeley (1991)等。

Nelson and Siegel (1987)所提出之 Parsimonious 模型，為實証模型中相當具有代表性的一種，此一模型的優點為使用簡單，利用較少的變數，即能產生平滑與良好的遠期利率與即期利率曲線。Bliss (1996) 修改 Nelson and Siegel (1987) 對二階微分方程式的等根設定，而得一有五個參數的模型（本文稱為 Extended Nelson-Siegel Model）。為了增加配適遠期利率的彈性，Svensson (1994)修改 Nelson and Siegel (1987)特定函數型態迴歸方法，並由此推估出預期物價之變化率，此一模型已獲得瑞典、德國的重視，而成為輔助中央銀行監視與評估貨幣政策的重要工具之一(李桐豪，2001)。Subramanian(2001)考慮了印度債券市場流動性不足的現象，利用流動性加權目標函數 (Liquidity-Weighted

Objective Functions)來估計殖利率曲線，其認為用流動性加權目標函數，可以確保市場中流動性較高的債券，其訂價誤差會小於流動性較低的債券，在實證結果作者發現對流動性低的債券市場而言，Nelson and Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 均可以提供較佳的估計。

在國內有關利率期限結構之估計上，周建新、于鴻福、張千雲(2003)曾利用 Nelson & Siegel(1987)所提出之 Parsimonious 模型，來估計台灣公債市場之利率期限結構，發現此一模型具有相當不錯之配適能力；此外，李桐豪(2001)利用立方樣條函數與 Nelson-Siegel-Svensson 方法，來估計台灣公債市場利率期間結構，但兩者在模型參數的估計上，仍有不盡完善之處。

本研究採用 Nelson & Siegel(1987)所提出四個、五個參數之 Parsimonious 模型，及六個參數之 Nelson-Siegel-Svensson Model，來估計台灣公債市場的利率期限結構。本研究以修正高斯牛頓法針對 Parsimonious 模型中所有參數做較合理的估計外，在國內債券市場日趨受到重視之趨，此一研究之成果，具有實務上之價值及貢獻。本研究之架構如下：第一節為緒論；第二節為利率期限結構相關之文獻探討；第三節為研究方法；第四節實證結果分析；第五節為結論與實務涵意。

貳、文獻探討

由於本研究所使用的利率期限結構估計模型，屬實証模型之一環，因此文獻探討中僅針對相關文獻，作一回顧。

在實証模型方面，McCulloch (1971,1975)首先以分段二次多項式樣條函數(quadratic polynomial spline)，直接估計美國國庫債券的折現函數 (discount function)。其所建構之折現函數，在長期時出現嚴重上彎或下彎現象，與長期的利率期間結構特性並不吻合。在 McCulloch (1971) 所提出之二次分段多項式中，最主要缺點是出現反曲點 (knuckles)

問題，其會使得一次微分不連續，曲線變得不平滑，因此 McCulloch (1975) 又提出立方樣條函數 (cubic spline function)，解決上述的缺失。雖然立方樣條函數解決了反曲點的問題，但因為公式的彈性太大，無法使折現因子成為非遞增函數(non-increasing)，導致在計算遠期利率時產生負值。接著 Mastronikola (1991) 提出複雜立方樣條函數 (complex cubic spline function) 以解決上述的問題。

Carleton and Cooper (1976) 是以債券價格為未來現金流量現值加總的概念，直接以債券價格為應變數，票息為自變數，折現因子為估計參數。但其所估計之折現函數為間斷而非連續的形態，且只有在付息日才有估計利率，若要求其他的時點，則需使用內插法。

Vasicek and Fong (1982) 發展出一種稱為指數樣條函數估計法 (exponential spline fitting) 來建構折現函數，作者認為可以獲得下列的結果：(1) 遠期利率會是時間的連續平滑函數；(2) 利率期限結構會隨著時間的增加而收斂；(3) 估計而得之曲線有足夠的彈性，可以捕捉各種利率期限結構的形狀。但是 Shea (1985) 應用前者的方法做實證研究，結果發現指數函數並不能達成 Vasicek & Fong (1982) 所預期的結果，遠期利率曲線在短期的波動和一般多項式的表現一樣，波動地非常嚴重，此外，由於利用最小平方法估計該模型，會因為最小平方法對錯誤資料敏感性過大，故必須逐步地篩選資料，以避免產生過大之估計誤差。

Adams and Deventer (1994) 使用最大平滑度的技巧，來推導遠期利率函數，與 McCulloch (1971, 1975) 和 Vasicek and Fong (1982) 的方法，對求出遠期利率做一比較，結果顯示此法最佳。

Nelson and Siegel (1987) 利用 Laguerre 函數來建立模型，此一模型之優點為(1) 無分段配適，所以可以減少參數的估計；(2) 其是由遠期利率之二階微分方程所推導而成，非一般的多項式近似函數，估計參數皆具有其經濟意義，可應用於總體經濟分析或投資決策上；(3) 經由模型所求得之殖利率曲線，為一連續平滑的曲線，且形狀包括了駝峰 (humps) 狀或 S 型態和單調函數 (monotonic)，與實際市場情況相當吻合，故不需依賴其它複雜的模式或參數，即可建構利率期限結構；實證結果發現此一模型對美國國庫券利率曲線

的配適能力高達 96%。為了增加配適遠期利率的彈性, Svensson(1994)將 Nelson and Siegel (1987)提出的模型做進一步的擴充, 成為一具有兩組根之四微分方程式, 但 Svensson (1994) 的遠期利率架構不能算是 Nelson and Siegel (1987)模型的延伸, 只能算是為實證估計目的而增加的項目。

Bliss (1996)修改 Nelson and Siegel (1987)對二階微分方程式的等根設定, 其認為 Nelson and Siegel (1987)模型原本配適的對象是短期國庫券, 但當此模型應用於配適長期利率期限結構時, 當初因非等根設定所導致過度配適, 即不再成為問題。Bliss (1996)提出之實證結果亦證實放寬等根設定會有最佳的配適效果。

以實證模型來配適國內公債之利率期限結構, 學者曾以不同之方法來探討殖利率曲線或遠期利率曲線之配適問題, 例如 Lin(1999,2002)、蔣松原(2000)以基礎樣條函數(B-Splines model)來建構台灣公債市場之殖利率曲線; 李賢源及林慧真(1998)以 Adams and Deventer(1994)模型, 來配適遠期利率曲線; 李賢源、謝承熹(1998)、謝承熹(2000)以分段三次方指數函數來配適台灣公債市場之利率期限結構; 李桐豪 (2001) 以立方樣條函數、Svensson (1994) 與 Nelson and Siegel (1987) 等方法估計我國公債市場利率期限結構, 探討兩類估計結果的差異, 並與中央銀行「金融統計月報」資本市場利率表公佈政府公債利率的差異, 作為同時探討公債發行及重貼現率與準備金政策, 對利率水準及利率期限結構可能的影響。結果發現, 如果估計利率期限結構時, 關切估計誤差與估計穩定度, 那麼立方樣條估計是建議採用的方法。但立方樣條函數估計不適用於超過樣本天期利率之估計, 因此我們若要找超長天期利率估計值, 則 Svensson (1994) 與 Nelson and Siegel (1987)模型的估計方法則為較佳之方法。周建新、于鴻福、張千雲(2003)分別以基礎樣條函數 (B-spline) 及 Nelson and Siegel (1987) 的 Parsimonious 模型(四參數模型), 估計台灣公債市場的利率期限結構。實證結果發現 Nelson and Siegel (1987)模型在配適能力上優於基礎樣條函數, 但此研究之缺失為對 Parsimonious 模型進行參數之估計上, 仍有未盡完善之處¹。

¹ 周建新, 于鴻福與張千雲(2003)首先固定其中一參數 τ , 參照賴曉璐(1996)界定出 τ 值的可能範圍, 再針對其它三個參數 β_0 、 β_1 及 β_2 進行估計。

Subramanian (2001)考慮了債券市場流動性不足的現象，利用流動性加權目標函數估計殖利率曲線，此目標函數使得流動性較高的債券有較高的權重，流動性較低的債券則權重較低，因此流動性高的債券會比流動性差債券，具有較小的估計誤差。理論上，債券買賣價差(bid-ask spread)之倒數為最佳的流動性函數，但並非所有的債券市場均有此一資訊，因此其利用債券的交易金額與交易數量來建立目標函數。作者實證結果亦發現，Nelson and Siegel(1987)模型與 Nelson-Siegel-Svensson (1994) 模型，可以提供較佳的利率期限結構估計。

綜合上述文獻發現，目前國內學者在利率期限結構配適模型之選擇上，主要以基礎樣條函數，與 Nelson and Siegel(1987)模型為主；但前一模型除了在參數估計上，不盡完善之外，此外，在利用 Nelson and Siegel (1987) 的 Parsimonious 模型，建構國內公債市場利率期限結構時，均只採用文獻中四個參數的模型，因此，本研究根據 Bills (1996) 放寬等根設定，利用 Nelson-Siegel Model(四參數模型)、Extend Nelson-Siegel Model(五參數模型)與 Nelson-Siegel-Svensson Model(六參數模型)，來建構台灣公債市場之利率期限結構，並比較上述模型在配適能力之優劣比較。

參、研究方法

一、利率期間結構估計模型

(一)Nelson-Siegel Model(四參數模型)

一般債券價格為未來特定現金流量以即期利率折現所得之現值，其理論價格的評價模式如下：

$$B_i = \sum_{m=1}^T \frac{CF_{im}}{[1 + R(m)]^{t_m}}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

其中 B_i 為債券的理論價格， n 為債券數目； m 為付息期數； CF_{im} 為第 i 個債券於時點 m 時

的現金流量； T 為到期日； t_{im} 為第 i 個債券於時點 m 時，距離下次付息日的時間； t 為距下次付息日的時間； $R(m)$ 為即期利率。

Nelson and Siegel (1987) 所提出的 parsimonious model 來建構利率期限結構。首先是根據二階微分方程式求出等根時的解，解出的式子代表瞬間即時遠期利率(instantaneous forward rate)函數，並考慮參數過多化問題後，表示如下：

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\tau}\right) + \beta_2 \left[\left(\frac{m}{\tau}\right) \exp\left(\frac{-m}{\tau}\right)\right] \quad (2)$$

經由方程式(3)的積分過程將遠期利率函數轉換為即期利率函數：

$$R(m) = 1/m \int_0^m f(x) dx \quad (3)$$

得到 Nelson-Siegel Model 如方程式(4)：

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau}{m}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau}\right)\right] + \beta_2 \left(\frac{\tau}{m}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau}\right)\right] \left(\frac{m}{\tau} + 1\right) \quad (4)$$

方程式 (4) 中的 β_0 、 β_1 、 β_2 、 τ 為未知的參數，其中 β_0 為 $R(m)$ 的漸近值，且必為正數，當 m 趨近無窮大時，殖利率曲線傾向於漸近線； β_0 是長期因子； β_1 為短期因子，為殖利率曲線的斜率，若 β_1 為負值，則殖利率曲線為正斜率，反之則為負斜率；且若 β_1 的絕對值愈大，則殖利率曲線愈陡峭；而 β_2 為中期因子，是描述殖利率曲線峰態的大小與趨勢，若 β_2 為正，則殖利率曲線為駝峰，若 β_2 為負，則曲線為 U 字型的；參數 τ 也必為正數，它指出了駝峰或 U 字型第一次在殖利曲線出現的位置，並決定了 β_1 和 β_2 收斂的速度，當 τ 值較小時收斂的速度較快，短期和中期影響力開始衰退的時點較快，反之，當 τ 值較大時，收斂速度較慢，短期和中期影響力開始衰退的時點較慢。

由於 $R(m)$ 無法直接由台灣債券市場中觀察得到，故令 P_i 表示觀察到的第 i 個債券的市場報價，其滿足下列條件：

$$P_i = B_i + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

由方程式(1)、(4)、(5)可得方程式(6)：

$$P_i = \sum_{m=t}^T \frac{CF_{im}}{\left\{ 1 + \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau}{m} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau}{m} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau} \right) \left(\frac{m}{\tau} + 1 \right) \right] \right\}^{t_{im}}} + \varepsilon_i \quad (6)$$

針對方程式(6)之非線性迴歸模型，利用實際價格和理論價格之差異最小化之準則，以修正高斯-牛頓法 (modified Gauss-Newton method) 反覆迭代(參見附錄一)，求解出滿足方程式(7)中，未考慮流動性不足限制下，各參數 β_0 、 β_1 、 β_2 和 τ 的最小平方估計值 (least-squares estimate)。

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (P_i - B_i)^2 = \text{Min} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (7)$$

(二) Extend Nelson-Siegel model

Nelson-Siegel model 為 Nelson and Siegel (1987) 所提出的四參數模型，但在文獻中，Nelson and Siegel (1987) 最原始根據二階微分方程式求出等根時的解，解出的方程式代表瞬間即時遠期利率 (instantaneous forward rate) 函數，表示如方程式(8)：

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1} \right) + \beta_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau_2} \right) \quad (8)$$

Nelson and Siegel (1987) 認為此一瞬間即時遠期利率，有參數過多化的問題，若假設 τ_1 等於 τ_2 ，則此一瞬間即時遠期利率，就類似方程式(2)；但若欲探討 τ_1 不等於 τ_2 時，是否更能有效地配適利率期限結構，因此本文將此一 Nelson and Siegel (1987) 的原始五參數模型稱之為 Extend Nelson-Siegel Model，並用其來估計台灣公債市場之利率期限結構。

同樣的，經由積分過程將遠期利率函數轉換為即期利率函數，得到 Extend Nelson-Siegel Model 如下：

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2} \right) \left(\frac{m}{\tau_2} + 1 \right) \right] \quad (9)$$

上述方程式中的 β_0 、 β_1 、 β_2 、 τ_1 及 τ_2 為未知的參數，其中 β_0 、 β_1 、 β_2 與 Nelson and Siegel 四個參數模型中的意義相同，而參數 τ_1 與參數 τ_2 必為正數，並分別決定了 β_1 和 β_2 收斂的速度。如同 Nelson-Siegel Model，本研究可得到如方程式(10)的非線性迴歸，並利用修正高斯牛頓法反覆迭代，求解出滿足目標函數(7)中參數的最小平方估計值。

$$P_i = \sum_{m=i}^T \frac{CF_{im}}{\left\{ 1 + \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_2} \right) \left(\frac{m}{\tau_2} + 1 \right) \right] \right\}^{t_{im}}} + \varepsilon_i \quad (10)$$

(三) Nelson-Siegel-Svensson Model (六參數模型)

Svensson (1994) 延伸 Nelson and Siegel (1987) 所提出的 parsimonious model，增加一額外項來考慮殖利率曲線中另一額外的駝峰。因此，Nelson-Siegel-Svensson Model 模型應可以考慮到遠期利率曲線更多樣形狀的優點。

在 Svensson (1994) 將 Nelson and Siegel (1987) 提出的遠期利率函數擴充為：

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{m}{\tau_1}\right) \exp\left(\frac{-m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \left(\frac{m}{\tau_2}\right) \exp\left(\frac{-m}{\tau_2}\right) \quad (11)$$

其中的 β_0 、 β_1 、 β_2 、 τ_1 與 Nelson-Siegel Model 中的參數有相同的特性，而新增的兩個參數 β_3 與 τ_2 則和 β_2 、 τ_1 有相同的特性。經由相同的轉換公式，將遠期利率函數轉換為即期利率函數如下：

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \left(\frac{m}{\tau_1} + 1 \right) \right] + \beta_3 \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_2} \right) \left(\frac{m}{\tau_2} + 1 \right) \right] \quad (12)$$

本研究可得到如方程式(13)的非線性迴歸，並利用修正高斯牛頓法反覆迭代，求解出滿足目標函數(7)中參數的最小平方估計值。

$$P_i = \sum_{m=1}^T \frac{CF_{im}}{\left\{ 1 + \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \left(\frac{m}{\tau_1} + 1 \right) \right] + \beta_3 \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_2} \right) \left(\frac{m}{\tau_2} + 1 \right) \right] \right\}^{t_{im}} + \varepsilon_i \quad (13)$$

二、模型配適能力

為了驗證 Nelson-Siegel Model、Extend Nelson-Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 在台灣公債市場殖利率曲線之配能能力，本研究利用附息債券價格為零息債券之投資組合，將求得零息債券殖利率代入方程式(1)，以計算出附息債券價格之理論價格，再與附息債券價格之市場價格相比較，來檢驗兩者之差異大小。

(一)判定係數：

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - \hat{B}_i)^2 / (n - k)}{\sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P})^2 / (n - 1)}$$

其中 \bar{P} 為市場平均價格， k 為參數個數， \hat{B}_i 為第 i 個債券預測之理論價格。此判定係數與迴歸分析中的判定係數在概念上一致，可以提供一明確的參照數值做為模型優劣之判斷準則，當此一數字越大，代表模型之配適能力愈佳。

(二)平均方根誤差百分比 RMSPE (root mean squared percentage error)：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i - \hat{B}_i}{P_i} \right)^2} * 100\%$$

此為相對量的誤差評估準則，其數值愈小，表示模型愈能捕捉到市場之價格。

(三)平均方根誤差：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i - \hat{B}_i)^2}$$

此為絕對量的誤差評估標準。

參、實證結果分析

一、資料來源

本研究資料來源為台灣經濟新報資料庫之公債買賣斷交易資料。本研究配適之殖利率曲線為週殖利率曲線，研究期間為 1995 年 12 月 29 日至 2002 年 9 月 27 日，共計 353 個觀察時點，總計公債樣本數為 85 筆，公債付息頻率包括半年或一年。在研究期間中某一特定觀察時點，債券樣本數均在 24 種以上。本研究公債樣本為每週星期五之盤中平均殖利率報價，若該時點無交易資料時，則以最近交易日報價來代替。

(一) Nelson-Siegel Model 之實證結果

賴曉璐(1996)與周建新、于鴻福、張千雲(2003)對 Nelson-Siegel Model 中參數 τ 的估計，均先界定出可能的範圍，認為 τ 值介於 0~10 之間，主要分佈於 5 以下和 10，分別考慮 50 個與 100 個可能的 τ 值，再求解其它三個參數的估計值。而本研究則確實的估計 τ 值，即直接估計四個參數，而不是像賴曉璐(1996)與周建新、于鴻福、張千雲(2002)論文般先固定 τ 值，再求其它三參數之值。

本研究實證結果發現 Nelson-Siegel Model 下 τ 值的估計值平均為 3.2125、最大值為 16.38，最小值為 0.004。圖 1 為觀察期間每週 τ 值之變化走勢。由圖 1 中可發現，在觀察期間中 τ 值大多分佈在 0~5 之間，只有少數幾週 $\hat{\tau}$ 值會大於 6，大於或接近 10 的週數更少，此結果與周建新、于鴻福、張千雲 (2003) 認為 τ 值主要集中於 10 的結果相異。圖 2、圖 3 和圖 4 則分別為 Nelson and Siegel 四參數模型中 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 及 $\hat{\beta}_2$ 三個參數之每週的變化走勢圖。

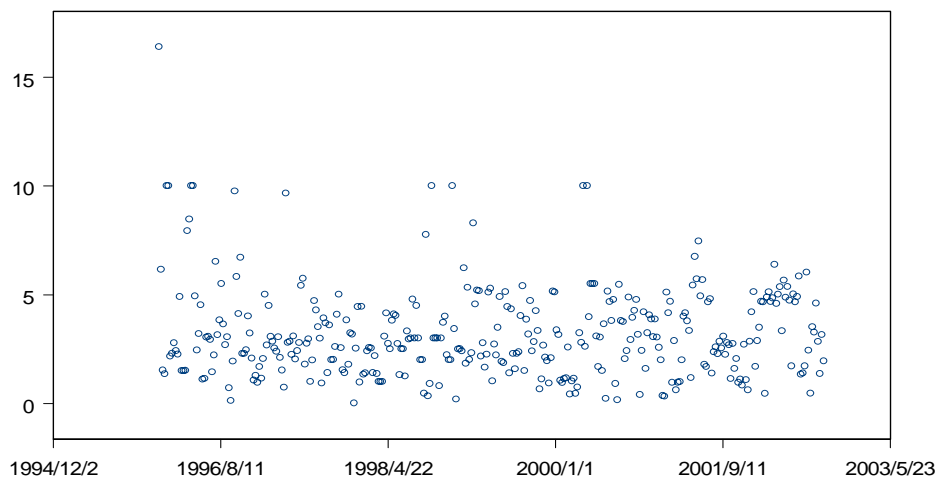


圖 1 Nelson-Siegel Model 中參數 $\hat{\tau}$ 散佈圖

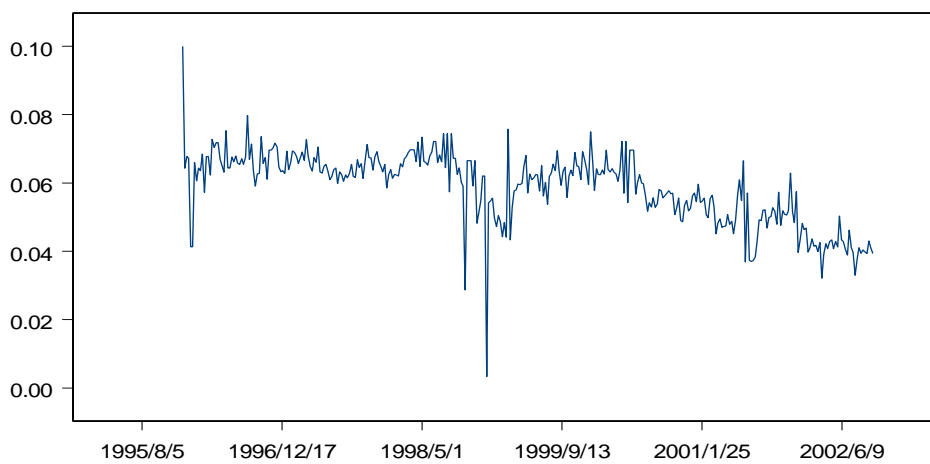


圖 2 Nelson-Siegel Model 中參數 $\hat{\beta}_0$ 之走勢圖

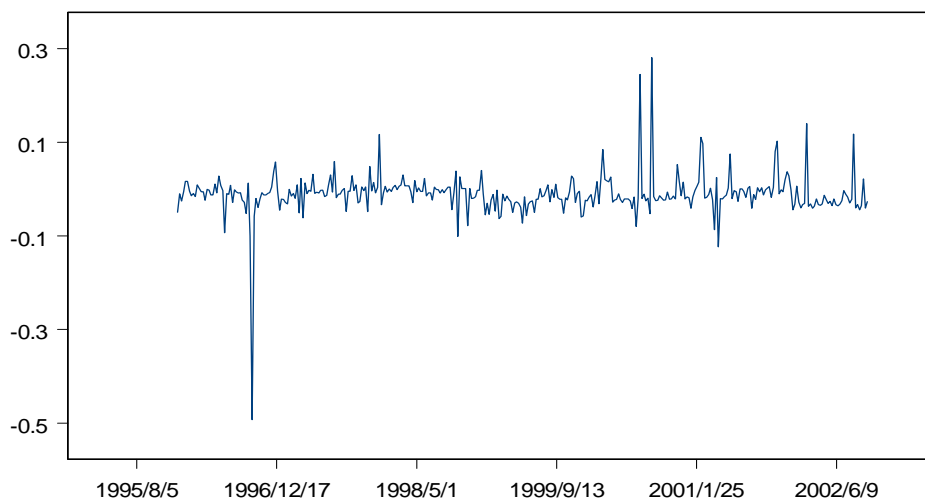


圖 3 Nelson-Siegel Model 中參數 $\hat{\beta}_1$ 之走勢圖

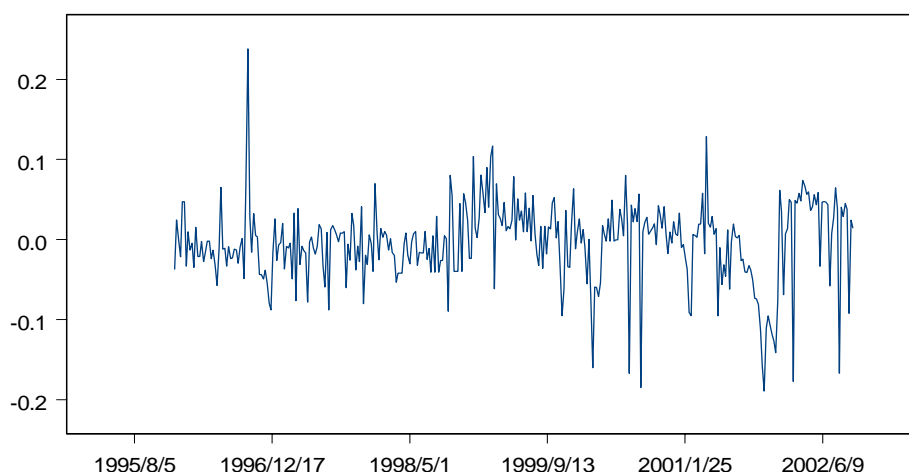


圖 4 Nelson-Siegel Model 中參數 $\hat{\beta}_2$ 之走勢圖

本研究另將研究期間分為七個觀察時段作一比較，每段期間約為一年，結果如表 1 所示。由表 1 可看出 Nelson-Siegel Model 中在 1995/12/29~1996/12/27、1997/1/3~1997/12/26、1998/1/2~1998/12/25、2000/1/7~2000/12/29 此四個觀察時段， $\hat{\beta}_1$ 與 $\hat{\beta}_2$ 均為負值，表示即期利率曲線為正斜率；1999/1/1~1999/12/31 與 2002/1/4~2002/12/27 觀察期間， $\hat{\beta}_1$ 為負值， $\hat{\beta}_2$ 為正值，表示該期間即期利率曲線為正斜率帶駝峰型；只有在 2001/1/5~2001/12/28 觀察時段中， $\hat{\beta}_1$ 為正值， $\hat{\beta}_2$ 為負值，故該觀察期間的即期利率曲線為負斜率帶凹谷型。

本研究以每週五觀察之樣本債券資料，經過修正高斯牛頓法得到每週之最佳參數值，代入 Nelson & Siegel (1987) 所提出之 Parsimonious 模型，即得到該時點之利率期限結構函數，本研究將 m 值設定為 1~30 (共 15 年，半年付息一次)，即可求得該時點的利率期限結構，由於每觀察時點之樣本資料不同，所求得之參數並非是固定，而是隨著每觀察時點樣本資料而改變的，因此該觀察時點所求得之參數，只用來配適該觀察時點之利率期限結構。圖 5 為 Nelson-Siegel Model 所估計出來之台灣公債市場之利率期限結構。

表1 以 Nelson-Siegel Model 所估計之參數平均值

期間	模型參數			
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\tau}$
1995/12/29~1996/12/27	0.0664	-0.0208	-0.0079	3.9664
1997/1/3~1997/12/26	0.0652	-0.0038	-0.0108	2.8744
1998/1/2~1998/12/25	0.0632	-0.0046	-0.0058	2.9114
1999/1/1~1999/12/31	0.0600	-0.0251	0.0198	3.1492
2000/1/7~2000/12/29	0.0589	-0.0027	-0.0026	3.1366
2001/1/5~2001/12/28	0.0505	0.0008	-0.0380	2.7869
2002/1/4~2002/9/27	0.0415	-0.0198	0.0211	3.7973

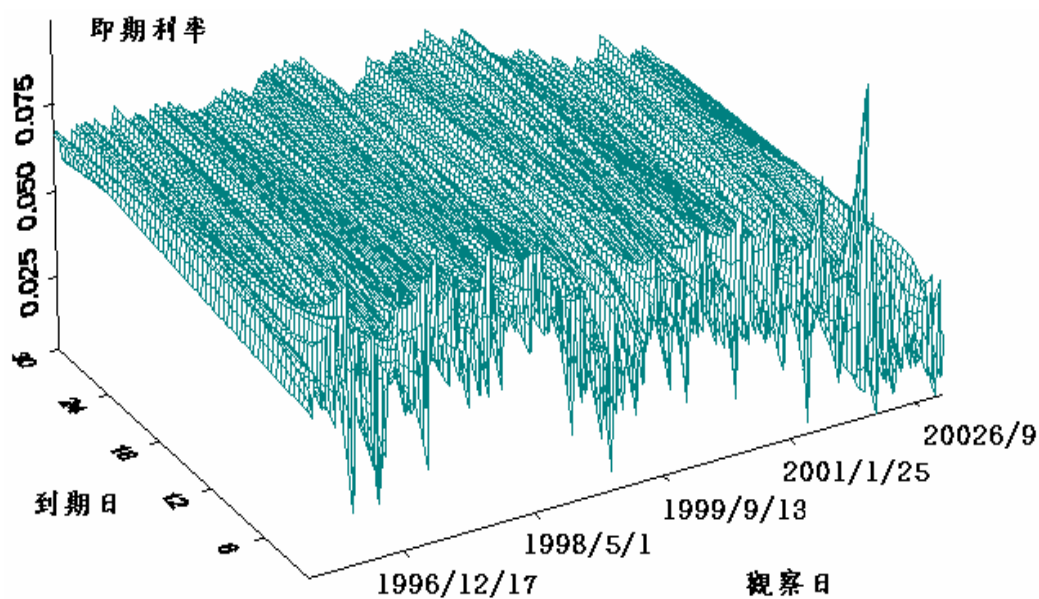
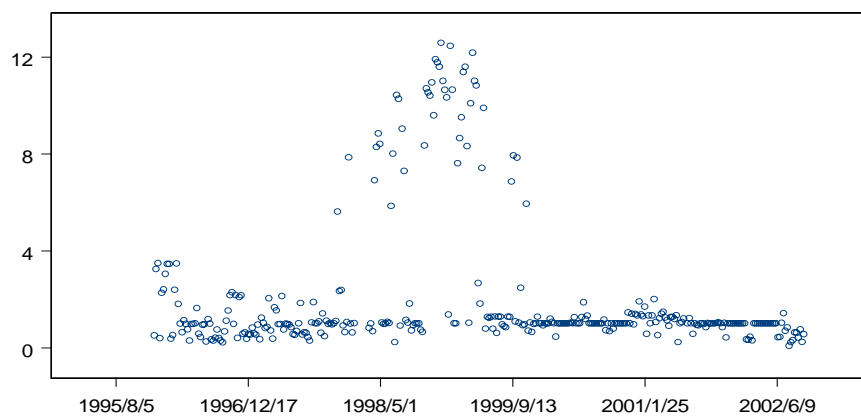
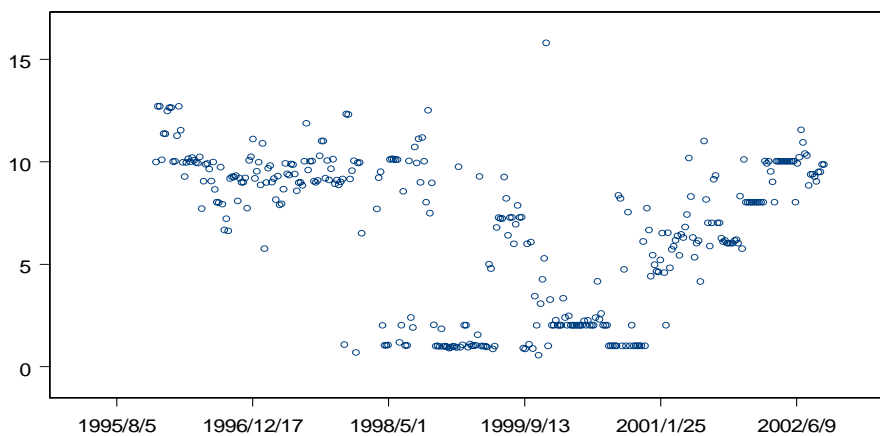


圖5 以 Nelson-Siegel Model 估計之利率期限結構

(二)Extend Nelson-Siegel Model 之實證結果

在 Extend Nelson-Siegel Model 中，本研究實證結果發現模型中參數 τ_1 之估計值較小，平均值為 2.084，由圖 6 可看出 τ_1 之估計值大多分布於 0~4 之間，只有不到 1% 的值是大於 6； τ_2 之估計值則較大，平均值為 6.6862，表示收斂速度較慢，中期影響力開始衰退的時點較慢。圖 7 為 Extend Nelson-Siegel Model 下所估計之 τ_2 散佈圖，可看出 τ_2 在觀察期間中多分散於 10 附近或 0~3 之間²。

圖 6 Extend Nelson-Siegel Model 中參數 $\hat{\tau}_1$ 之散佈圖圖 7 Extend Nelson-Siegel Model 中參數 $\hat{\tau}_2$ 之散佈圖

² 受限於篇幅，未考慮流動性不足限制下，Extend Nelson-Siegel Model 中， $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 及 $\hat{\beta}_2$ 三個參數每週之變化走勢圖，在此並未呈現。

根據表 2 的實證結果顯示 Extend Nelson-Siegel Model 在 1995/12/29、1996/12/27、1997/1/3~1997/12/26、1999/1/1~1999/12/31、2001/1/5~2001/12/28 此四觀察時段中， $\hat{\beta}_1$ 與 $\hat{\beta}_2$ 均為負值，故即期利率曲線為正斜率；2000/1/7~2000/12/29 與 2002/1/4~2002/9/27 觀察時段中， $\hat{\beta}_1$ 為負值， $\hat{\beta}_2$ 為正值，故該時段即期利率曲線為正斜率帶駝峰型。圖 8 則為 Extend Nelson-Siegel Model 在未考慮流動性限制下，所估計之利率期限結構。

表 2 Extend Nelson-Siegel Model 所估計之參數平均值

期間	模型參數				
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$
1995/12/29~1996/12/27	0.0858	-0.0888	-0.0629	1.2463	9.7774
1997/1/3~1997/12/26	0.0859	-0.085	-0.0593	1.0860	9.318
1998/1/2~1998/12/25	0.0797	-0.0584	-0.0066	4.9608	5.7012
1999/1/1~1999/12/31	0.0713	-0.0363	-0.0237	4.3161	4.0614
2000/1/7~2000/12/29	0.0611	-0.064	0.0205	1.0386	2.5739
2001/1/5~2001/12/28	0.0586	-0.0523	-0.037	1.0768	6.5137
2002/1/4~2002/9/27	0.0401	-0.0612	0.0217	0.7679	9.4392

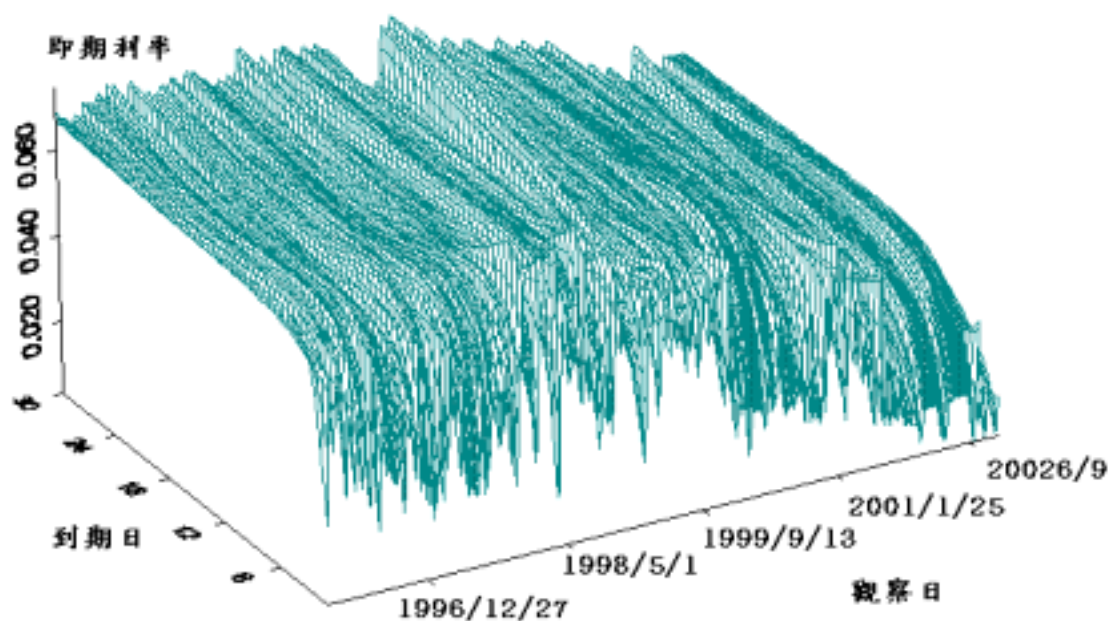


圖 8 Extend Nelson-Siegel Model 所估計之利率期限結構

(三) Nelson-Siegel-Svensson Model 之實證結果

在 Nelson-Siegel-Svensson Model 中，本研究實證結果發現，參數 τ_1 之估計值較小，整個觀察期間 τ_1 平均值為 1.435，圖 9 為 Nelson-Siegel-Svensson Model 在未考慮流動性不足下， τ_1 估計值的散佈圖，由圖中可看出 τ_1 多分佈於 0~2 之間，只有少數幾週較大散佈於 4~6 之間，表示短期影響力衰退的速度較快；圖 10 為 Nelson-Siegel-Svensson Model 在未考慮流動性不足下， τ_2 估計值的散佈圖， τ_2 估計值較 τ_1 大，整個觀察期間 τ_2 平均值為 5.798，表示中期影響力衰退的速度較慢，且開始衰退的時點也較慢。

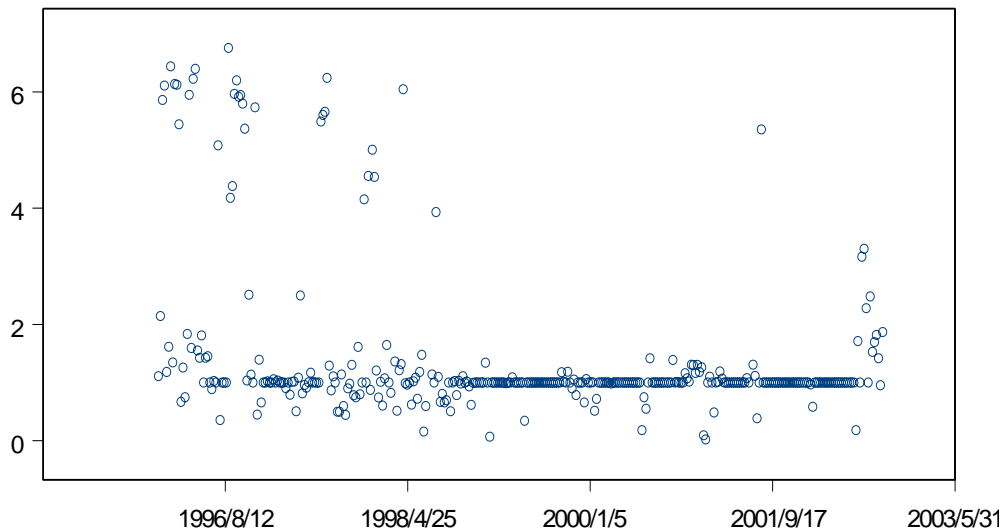


圖 9 Nelson-Siegel-Svensson Model 參數 $\hat{\tau}_1$ 之散佈圖

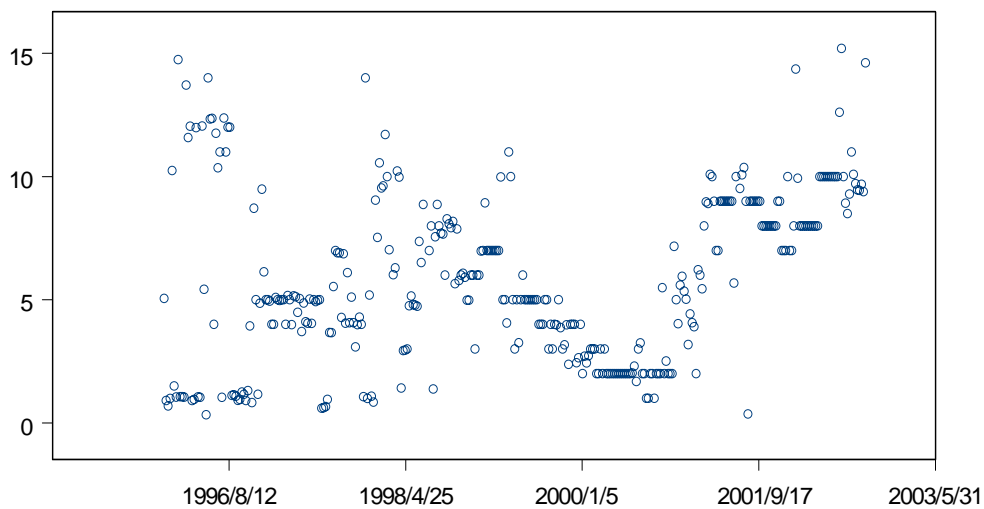


圖 10 Nelson-Siegel-Svensson Model 參數 $\hat{\tau}_2$ 之散佈圖

表3為未考慮流動性不足限制下，Nelson-Siegel-Svensson Model 中參數 β_1 、 β_2 、 β_3 、 τ_1 、 τ_2 估計之平均值。Nelson-Siegel-Svensson Model 在 1995/12/20~1996/12/27、2001/1/5~2001/12/28、2002/1/4~2002/9/27 此三個觀察時段中，參數 β_1 、 β_2 、 β_3 估計平均值皆為負值，表示此三觀察時段中的利率期限結構為正斜率型。1998/1/2~1998/12/25、2000/1/7~2000/12/29 期間， $\hat{\beta}_1$ 為正值、 $\hat{\beta}_2$ 與 $\hat{\beta}_3$ 皆為負值，表示在觀察期間，利率期限結構為負斜率帶凹谷型；而在 1997/1/3~1997/12/26、1999/1/1~1999/12/31 此兩觀察期間中，利率期限結構則為正斜率帶駝峰型。圖 11 為 Nelson-Siegel-Svensson Model 所估計之利率期限結構。

表3 Nelson-Siegel-Svensson Model 估計之參數平均值

期間	模型參數					
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$
1995/12/29~1996/12/27	0.0764	-0.0037	-0.0403	-0.0654	2.9371	5.5400
1997/1/3~1997/12/26	0.0757	-0.0348	0.0482	-0.0813	1.5568	4.4310
1998/1/2~1998/12/25	0.0772	0.0010	-0.0326	-0.0488	1.1825	6.5816
1999/1/1~1999/12/31	0.0731	-0.0277	0.0014	-0.0463	0.9749	5.1633
2000/1/7~2000/12/29	0.0616	0.0374	-0.0367	-0.0282	0.9914	2.6002
2001/1/5~2001/12/28	0.0589	-0.0449	-0.0252	-0.0224	1.0583	7.7296
2002/1/4~2002/9/27	0.0493	-0.0527	-0.0302	-0.0022	1.2556	9.5945

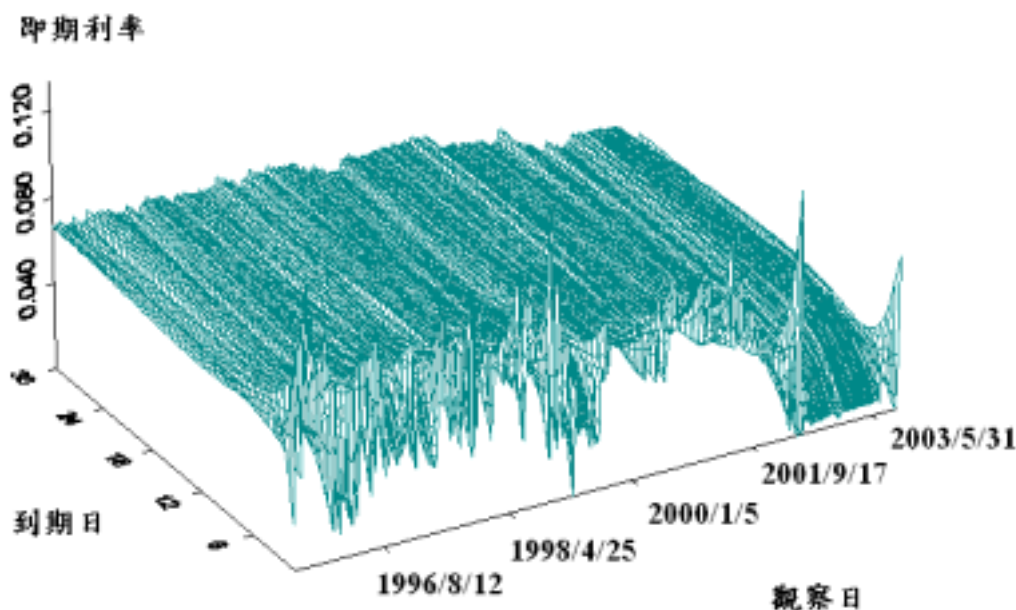


圖 11 Nelson-Siegel-Svensson Model 估計之利率期限結構

(四)三種模型配適能力比較

本研究採用三種判斷準則來比較 Nelson-Siegel Model、Extend Nelson-Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 的配適能力，配適結果如表 4 表示，其中 Nelson-Siegel Model 觀察期間的判定係數平均值為 0.9084，最高值達到 0.9923，最小值為 0.7999，且在整個的觀察期間中，有 62% 以上判定係數是大於 0.9，此結果再次驗證 Nelson-Siegel Model 對台灣公債市場殖利率曲線有良好的配適能力。另外，在觀察期間內，平均方根誤差的最小值為 0.594，表示每百元報價的實際價格和理論價格差相 0.594 元。

Extend Nelson-Siegel Model 在整個觀察期間，判定係數平均值為 0.9109，配適效果較 Nelson-Siegel Model 更佳；另外，在觀察期間中 Extend Nelson-Siegel Model 有 80% 以上的判定係數大於 0.9，表示增加為五個參數模型，可以提高模型之配適能力，不會因較多的參數而影響其配適能力；至於六個參數之 Nelson-Siegel-Svensson Model 的配適能力則最佳，整個觀察期間的判定係數平均值為 0.9140，最小值也有 0.7999，顯示再增加一個參數，模型之配適能力可以再進一步提高。

表4 三模型的配適結果

	平均方根誤差百分比			平均方根誤差			判定係數		
	Nelson-Siegel	Extend Nelson-Siegel	Nelson-Siegel-Svensson	Nelson-Siegel	Extend Nelson-Siegel	Nelson-Siegel-Svensson	Nelson-Siegel	Extend Nelson-Siegel	Nelson-Siegel-Svensson
平均數	0.0171	0.0169	0.0168	1.9170	1.8977	1.8738	0.9084	0.9109	0.9140
標準差	0.0052	0.0043	0.0041	0.6221	0.5214	0.4982	0.0462	0.0418	0.0353
最大值	0.0364	0.0312	0.0332	3.2747	3.8031	3.7599	0.9923	0.9895	0.9917
最小值	0.0054	0.0066	0.0020	0.5940	0.7230	0.2143	0.7999	0.7021	0.7999

表5 為未考慮流動性不足限制下，Nelson-Siegel Model Extend、Nelson-Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 在七個觀察期間中，判定係數與利率期限結構形狀的比較，由表中發現：(1) Nelson-Siegel Model 可以估計出較多樣的利率期限結構，包括了正斜率、負斜率帶凹谷、正斜率帶駝峰，而 Extend Nelson-Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 所估計的殖利率曲線則多為正斜率或正斜率帶駝峰型；(2)1995/12/29~1996/12/27、1997/1/3~1997/12/26、1998/1/2~1998/12/25 與 2001/1/5~2001/12/28 此四觀察期間，利率曲線結構均是正斜率為最優；而 1999/1/1~1999/12/31、2000/1/7~2000/12/29 與 2002/1/4~2002/9/27 則以正斜率帶駝峰型為佳，表示台灣公債市場的利率期限結構較偏向於正斜率或正斜率帶駝峰型；(3)不同之時段，以三種模型來分析，會得到不同之形狀，但比較判定係數，以 Nelson-Siegel-Svensson Model 在七段期間中有四次得到最佳之結果，因此以此一模型可得最佳之配適能力。

表 5 三種模型判定係數的比較

模型期間	Nelson-Siegel Model		Extend Nelson-Siegel Model		Nelson-Siegel-Svensson Model	
	判定係數	形狀	判定係數	形狀	判定係數	形狀
1995/12/29~ 1996/12/27	0.9379	正斜率	0.9418	正斜率	0.9460	正斜率
1997/1/3~ 1997/12/26	0.9291	正斜率	0.9084	正斜率	0.9135	正斜率 帶駝峰型
1998/1/2~ 1998/12/25	0.8603	正斜率	0.8755	正斜率	0.8830	正斜率
1999/1/1~ 1999/12/31	0.8844	正斜率 帶駝峰型	0.8852	正斜率	0.8915	正斜率 帶駝峰型
2000/1/7~ 2000/12/29	0.9155	正斜率	0.9184	正斜率 帶駝峰型	0.9166	正斜率
2001/1/5~ 2001/12/28	0.8941	負斜率 帶凹谷型	0.9102	正斜率	0.9127	正斜率
2002/1/4~ 2002/9/27	0.9348	正斜率 帶駝峰型	0.9411	正斜率 帶駝峰型	0.9393	正斜率

伍、結論與管理實務涵義

一、結論

本研究利用台灣公債市場每週市場資料，以四參數之 Nelson-Siegel Model、五參數之 Extend Nelson-Siegel Model 與六參數之 Nelson-Siegel-Svensson Model，來估計台灣公債市場之利率期限結構，由於 Extend Nelson-Siegel Model，國內尚未有相同之實證研究，而本研究發現在估計利率期限結構時，配適效果較 Nelson-Siegel Model 為佳；另外 Nelson-Siegel-Svensson Model 又較 Extend Nelson-Siegel Model 為優，顯示多增加一個參數之後，更能有效地捕捉利率期限結構之變化。

在研究方法上，本研究以修正高斯-牛頓法，估計所有參數的估計值，而非文獻中將某一參數限定在特定範圍，因此本研究在參數估計上，較之前學者所使用之方法更加精確。

在模型配適能力方面，本研究結果發現在觀察期間中，Nelson-Siegel Model、Extend Nelson-Siegel Model 與 Nelson-Siegel-Svensson Model 皆有非常好的配適效果，此三種模型的判定係數平均皆高於 0.9；且估計出的台灣公債市場利率曲線以正斜率及正斜率帶駝峰型為主。

二、實務涵義

利率期限結構為零息債券的殖利率與其到期日之間的關係，其不僅可作為公債、公司債等普通債券的定價依據、判斷未來利率走勢，亦是評價各種利率衍生性商品的輸入資料，其重要性不言而喻。由於各國政府甚少發行到期日超過一年以上之零息債券，此本文利用 Nelson and Siegel(1987)模型為基礎，所發展出之四參數、五參數與六參數模型，利用修正高斯-牛頓法，求得台灣公債市場之利率期限結構。由於國內債券市場正逐漸蓬勃發展，本研究之成果可以作為主管機關決定何種計量模型，較合適用來監視國內長短期利率結構；此外，本研究亦可提供實務界，作為訂價交易及避險策略運用之依據。

附錄 修正高斯牛頓法

在許多非線性迴歸的求解問題上，高斯-牛頓法常用以求解參數的最小平方估計值，但牛頓-高斯法常在迭代的過程中，發生參數無法收斂的情況(Neter, Wasserman & Kutner ; 1987)，因此本研究利用 Hartley (1961) 提出的修正高斯牛頓法，來求解非線性迴歸式(6)中的四個參數。

首先令 $\beta_3 = \tau$ 、 $g = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ 、 $f(CF_i, g) = B_i$, $1 \leq i \leq n$ ，對 $f(CF_i, g)$ 中四個參數一階微

分為：

$$\frac{\partial f(CF, g)}{\partial \beta_k} \equiv f_k(CF, g), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (14)$$

對一般目標函數 $Q(g)$ 一階微分為：

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_k} = Q_k(CF, g) = -2 \sum_{i=1}^n (P_i - B_i) \times f_k(CF, g) \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} f_0(CF, g) &= \sum_{m=t}^T (-t_{im}) \times \frac{CF_{im}}{[1+R(m)]^{t_{im}+1}} \\ f_1(CF, g) &= \sum_{m=t}^T (-t_{im}) \times CF_{im} \times \frac{\left[\frac{\tau}{m} \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}} \right) \right]}{[1+R(m)]^{t_{im}+1}} \\ f_2(CF, g) &= \sum_{m=t}^T (-t_{im}) \times CF_{im} \times \frac{\left[\frac{\tau}{m} \times \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau} \left(1 + \frac{m}{\tau} \right)} \right) \right]}{[1+R(m)]^{t_{im}+1}} \\ f_3(CF, g) &= \sum_{m=t}^T (-t_{im}) \times CF_{im} \times \frac{\beta_1 \left[\frac{1}{m} \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau}} \right) - e^{-\frac{m}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right] + \beta_2 \left[\frac{1}{m} - e^{-\frac{m}{\tau} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\tau^2} \right)} \right]}{[1+R(m)]^{t_{im}+1}} \end{aligned}$$

設 $g^{(0)} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(0)} \\ \beta_1^{(0)} \\ \beta_2^{(0)} \\ \beta_3^{(0)} \end{bmatrix}$ 表示 β_0 、 β_1 、 β_2 與 τ 的起始向量。首先由以下的聯立方程式(16)解

得四參數 β_0 、 β_1 、 β_2 與 τ 的修正量 (corrections), $D = \begin{bmatrix} D_0^{(0)} \\ D_1^{(0)} \\ D_2^{(0)} \\ D_3^{(0)} \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{cases} 2 \sum_{k=0}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n f_0(CF_i, g^{(0)}) f_k(CF_i, g^{(0)}) \right\} D_k = -Q_0(CF, g^{(0)}) \\ 2 \sum_{k=0}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n f_1(CF_i, g^{(0)}) f_k(CF_i, g^{(0)}) \right\} D_k = -Q_1(CF, g^{(0)}) \\ 2 \sum_{k=0}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n f_2(CF_i, g^{(0)}) f_k(CF_i, g^{(0)}) \right\} D_k = -Q_2(CF, g^{(0)}) \\ 2 \sum_{k=0}^3 \left\{ \sum_{i=1}^n f_3(CF_i, g^{(0)}) f_k(CF_i, g^{(0)}) \right\} D_k = -Q_3(CF, g^{(0)}) \end{cases} \quad (16)$$

考慮方程式(17)：

$$Q(\nu) = Q(CF, g^{(0)} + \nu D), \quad 0 \leq \nu \leq 1 \quad (17)$$

此時，函數 f 與 Q 變為 ν 的函數。為了求得 Q 在 $0 \leq \nu \leq 1$ 中的最小值，本文利用以下的近似方法：

首先計算出當 $\nu = 0$ 、 $\nu = \frac{1}{2}$ 與 $\nu = 1$ 時的 Q 值， $Q(0)$ 、 $Q(\frac{1}{2})$ 與 $Q(1)$ ，透過方程式(18)可以得出其最小值：

$$\nu_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(Q(0) - Q(1)) / (Q(1) - 2Q(\frac{1}{2}) + Q(0)) \quad (18)$$

又 $g^{(1)} = g^{(0)} + \nu D$ ，如此可求得修正估計值為

$$g^{(1)} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(1)} \\ \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(1)} \\ \beta_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(0)} \\ \beta_1^{(0)} \\ \beta_2^{(0)} \\ \beta_3^{(0)} \end{bmatrix} + \nu_{\min} \begin{bmatrix} D_0^{(0)} \\ D_1^{(0)} \\ D_2^{(0)} \\ D_3^{(0)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

如此將 $g^{(1)}$ 視為 g 的新的起始值，並重覆上述程序，我們即可得到 $g = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ 新的修正

估計值 $g^{(2)}$ 。繼續執行此一迭代的過程，直到對於某一 $S \in N$ ，

$$\|g^{(S+1)} - g^{(S)}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^4 (\beta_i^{(S+1)} - \beta_i^{(S)})^2} < \Delta$$

其中 Δ 為一事先給定的容差值。此時， $g^{(S+1)}$ 即可視為 $g = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ 之最終估計值。

參考文獻

1. 李桐豪(2001),「債券市場發展對貨幣政策之影響」, 中央銀行季刊, 第二十三卷第一期, 頁 23-45。
2. 李賢源、林慧貞(1998),「最大平滑度遠期利率曲線配適模型之再探討」, 中國財務學刊, 第六卷第一期, 頁 45-75。
3. 李賢源、謝承熹 (1998),「以分段三次方指數函數與非線性最適化技巧配適台灣公債市場之利率期限結構」, 管理與系統, 第五卷第二期, 頁 277-286。
4. 周建新、于鴻福、張千雲 (2003),「利率期限結構估計模型之實證研究」, 管理學報, 第二十卷第四期, 頁 775-804。
5. 賴曉璐 (1996),「政府公債殖利率曲線形狀與免疫策略的選擇」, 國立台灣大財務金融學研究所碩士論文。
6. 蔣松原 (2000),「建構台灣市場殖利率曲線」, 貨幣觀察與信用評等, 第二十二期, 頁 99-119。
7. 謝承熹 (2000),「以分段三次方指數函數來配適台灣公債市場之利率期限結構:線性最適化與非線性最適化之比較」, 中國財務學刊, 第八卷第二期, 頁 25-47。
8. Adams,K. J.,Van Deventer,D. R.(1994), “Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness”, The Journal of Fixed Income, pp. 52-62.
9. Bliss, R. R. (1996), “Testing Term Structure Estimation Methods”, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 96-12a, November 1996.
10. Brennan, M. J., Schwartz, E. S. (1979), “A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds”,Journal of Banking and Finance, Vol. 3, pp. 133-156.
11. Carleton, W. T., Cooper I. A. (1976), “Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates”, Journal of Finance, Vol. 31, pp. 1067-1083.
12. Cox,J.C., Ingersoll,J. E. and Ross, S. A.(1985a),“An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices”,Econometrica,Vol. 53, pp. 363-384.
13. Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1985b), “Theory of the Term Structure of Interest Rate”, Econometrica, Vol. 53, pp. 385-407.
14. Dothan, L. U. (1978), “On the Term Structure of Interest Rates”, Journal of Financial Economics, Vol. 31, pp. 59-69.
15. Hartley, H. O. (1961), “The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares”, Technometrics, Vol. 3, pp. 269-280.

16. Lin, B. H. (1999), "Fitting the Term Structure of Interest Rates for Taiwanese Government Bonds", Journal of Multinational Financial Management, Vol. 9, pp. 331-352.
17. Lin, B. H. (2002), "Fitting Term Structure of Interest Rates Using B-Splines: the Case of Taiwanese Government Bonds", Applied Financial Economics, Vol. 12, pp. 57-75.
18. Mastronikola, K. (1991), "Yield Curves for Gilt-Edged Stocks: A New Model", Bank of England Discussion Paper (Technical Series), December.
19. McCulloch, J. H. (1971), "Measure the Term Structure of Interest Rates", Journal of Business, pp. 19-31.
20. McCulloch, J. H. (1975), "The Tax-Adjusted Yield Curve", Journal of Finance, Vol. 31, pp. 881-830.
21. Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987), "Parsimonious Modeling of Yield Curves", Journal of Business, Vol. 60, pp. 473-489.
22. Neter, J., Wasserman, W., and Kutner, M. H. (1987), Applied Linear Regression Model, Irwin. Inc. 2nd ed.
23. Schaefer, S. M. (1981), "Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market of British Government Securities", The Economic Journal, No.91, pp. 415-438.
24. Shea, G. S. (1985), "Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note", The Journal of Finance, Vol. 40, pp. 319-325.
25. Steeley, J. M. (1991), "Estimating the Gilt-Edged Term Structure Basis Spline and Confidence", Journal of Business Finance and Accounting, Vol.18, pp. 513-529.
26. Svensson, L. E. O. (1994), "Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994", NBER Working Paper Series 4871.
27. Subramanian, K. V. (2001), "Term Structure Estimation in Illiquid Markets", The Journal of Fixed Income, Vol.11, pp. 77-86.
28. Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", Journal of Financial Economics, Vol.5, pp. 177-188
29. Vasicek, O. A., Fong, G. (1982), "Term Structure Estimation Using Exponential Splines", Journal of Finance, Vol.38, pp. 339-348.