財金論文叢刊
2004 年 6 月，第一期，1-23

動態波動模型預測能力之比較與實證

周雨田

中央研究院經濟研究所

巫春洲

中原大學國際貿易學系

劉炳麟

交通大學管理科學學系

摘要

本文研究討論 CARR(Conditional Auto-Regression Range)模型的經濟涵義及其性質，並以台灣發行量加權股價指數做為主要的研究對象，在週資料與日資料的基礎上，分別進行 CARR 模型及 GARCH 模型在波動性預測能力之比較。實證結果顯示，不管是樣本內及樣本外，在週資料的預測評比上皆得到 CARR 模型優於 GARCH 模型的結果，此與 Chou(2002)的結論具有一致性，說明了不只是 S＆P500 的股價指數資料，另外，包括了台灣發行量加權股價指數資料，皆支持 CARR 模型的可適用性。同時，股票市場中的槓桿效果也在本文之研究設計下獲得證實。

關鍵字：CARR、GARCH、變幅、波動性和槓桿效果

壹、前言

對於資產的定價、投資組合的有效配置及風險的控管而言，相關財務文獻認為波動性（volatility）具有關鍵的影響力，而且在衍生性商品的訂價上也扮演著舉足輕重的角色，例如 Hull 和 White(1987)即是將隨機波動性的概念，納入刻畫標的股價形成的模型中，來設計選擇權的定價方式。加上機構法人及共同基金經理人等在 vega(或 kappa)風險的控管[1]的需求，更彰顯研究波動性議題的必要性與重要性。如果能夠明確掌控資產價格波動的特性，進而配適一個能夠充分表現價格變動的波動模型，則不管在資產管理上避險策略的運用或者是更積極的套利操作方面，必然有所貢獻。傳統的計量模型，由於模型中干擾項（innovation term）處理的困難，通常假設干擾項的變異數為常數，但由金融市場的實際觀察，不難發現波動性變化是時間的函數，而且往往有特別的屬性，例如叢聚效果或高狹峰。近期財務文獻皆普遍同意波動性變數具有因時而異的特性。例如 Poterba 和 Summers(1986)，French, Schwert 和 Stambaugh(1987)，Bollerslev, Engle 和 Wooldridge (1988)，Bailie 和 Degennaro(1990)，Andersen 和 Bollerslev(1997)，與 Alizadeh, Brandt 和 Diebold(2002)等等，因此如果能事先預知波動性行程，將有助於提升決策的品質。

Morgan(1976)發現股票報酬率的變異數會隨著時間而改變，這種現象稱為異質變異（heteroscedasticity）。Mandelbrot(1963)和 Fama(1965)指出股價的分配呈現高峽峰（leptokurtic）且厚尾（fat tail）的型態，而且股價的變動並非獨立。Mandelbrot(1963)並指出股票的報酬率具有跨期相關性，當股價產生相對較大的變動時，之後幾期也會產生較大的變動，這種現象文獻上稱做波動性群聚（clustering）。Cassuto(1995)指出金融資產報酬的時間數列資料，常常具有波動性聚集的現象，造成傳統的迴歸模型不能完全解釋市場實際狀況。Engle(1982)更將波動性會因時而異的性質予以模型化而提出 ARCH(Auto-Regression Conditional Heteroskedasticity)模型，主要特點乃將條件變異數設定為落後期殘差項平方的函數，並配適於英國市場資料時，獲得實證上的支持。據此，Bollerslev(1986)提出 GARCH(Generalized Auto-Regression Conditional Heteroskedasticity)模型，除納入落後期殘差平方項的影響外，亦同時將條件變異數的落後期導入模型中，

[1]在衍生性金融商品的風險控管上，一般將標的資產波動性變動對其衍生性投資組合價值變動的影響，稱做 vega 或 kappa。

使得條件變異數的動態結構更具彈性，在參數估計上也可以更精簡(parsimony)。關於 ARCH/GARCH 模型在財務與經濟上的應用及說明，相關文獻則可以參考 Bollerslev, Chou 和 Kroner(1992)以及 Bollerslev, Engle 和 Nelson(1994)。

就衡量波動性的技術層面而言，統計學上已有很多文獻支持可以利用變幅（range）的觀念當做波動性的代理變數（proxy），就金融市場的資料而言，變幅可以定義為在某一固定抽樣期間內，有價證券最高價與最低價的價差。財務文獻上，Mandelbrot(1963)曾使用變幅的觀念去檢驗資產價格長期依存度關係。Parkinson(1980)更進一步說明，與傳統測量歷史波動性的方法比較下，使用變幅來預測股價的波動性，會比只有使用收盤價資訊來進行波動性預測的表現為佳，然而在實證資料上，卻一直無法得到一致性的佐證用以支持變幅的表現優於上述其他方法。Brandt 和 Jones(2002)亦曾用變幅的觀念並結合 EGARCH 模型來刻畫隨機波動性行程。另外，Chou(2002)提出 CARR(Conditional Auto-Regressive Range)模型，主要內涵在於將變幅與 GARCH 模型結合，CARR 模型適當刻畫變幅的動態結構，使得變幅在波動性的預測上保持優勢（dominance），並在 S&P500 股價指數的市場交易資料獲得實證上的成功。Brandt 和 Jones(2002)與 Chou(2002)皆利用變幅的觀念來分析波動性行程，然而二者在模型的設計上有所不同，Chou(2002)的變幅模型主要著眼於變幅之條件均數的動態過程，而 Brandt 和 Jones(2002)則探討條件報酬波動性的動態過程。本文擬由 CARR 模型出發，探討台灣發行量加權股價指數波動性行程的表現，是否可以被 CARR 模型充分捕捉其特性，並與 Chou(2002)的研究結果比對是否具有一致性。另外，本研究有別於 Chou(2002)只侷限於模型參數的估計及樣本內資料的預測，除引用台灣股票集中市場資料進行樣本內的配適與預測外，更進一步的擴展延伸至樣本外預測能力的討論，以期驗證 CARR 模型在樣本外預測方面，是否具體可行。本文架構除前言外，第二部份主要在闡釋研究的設計與方法，第三部分為資料分析，說明研究過程中的分析對象，第四部分為實證結果說明並探討其經濟意義與直覺，最後，第五部份為本研究之結論。

貳、研究方法

ARCH/GARCH 模型在刻畫波動性的動態過程以及模型的參數估計上相對於 Hull 和 White(1987)主張的隨機波動性(Stochastic Volatility)模型容易操作。另外，在更早期的文獻中 Parkinson (1980)提出變幅可以當做波動性的有效估計值，然而在實證資料上卻一直無法得到一致性的支持，一直到 Chou(2002)認為，變幅在波動性上的估計能力之所以無法彰顯，主要的原因乃肇因於模型對波動性動態結構刻畫的不完備，而不是變幅無法當做波動性的代理變數。大約在同一時期 Gallant, Hsu 和 Tauchen(1999)及 Alizadeh, Brandt 和 Diebold(2002)在隨機波動性模型的架構之下，亦嘗試將變幅觀念納入資產定價模型當中。對照之下，Chou(2002)乃將變幅的觀念納入 GARCH 模型而提出 CARR 模型，此模型的特色之一是把單位時間內價格變動的極端值表現在模型的動態結構當中，針對 GARCH 模型的動態過程與變幅特有的屬性，巧妙地進行有效的結合。同時，Brandt 和 Jones(2002)則將變幅的觀念納入 EGARCH 模型的條件波動性方程式，並拓展出兩因子 EGARCH 動態變幅模型，藉以輔助波動性行程的表現與預測，再再顯示出變幅議題普遍受重視的程度。

就模型的形式及性質而言，CARR 模型與 Engle 和 Russell (1998)提出的 ACD (Autoregressive Conditional Duration)模型較為相近[2]。但由於 CARR 模型建立在一階動差的變化上，因此 CARR 模型在分析不對稱性質[3]及參數估計方面相較於 GARCH 模型更容易操作。底下介紹 CARR 模型的意義與內涵。

CARR(p,q)模型如(1)式所示：

$$
\begin{aligned}
&R_t = \lambda_t \varepsilon_t \\
&\lambda_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \lambda_{t-j} \qquad (1) \\
&\varepsilon_t \sim iid \quad f(.)
\end{aligned}
$$

[2]雖然 CARR 模型類似於 ACD 模型，但此兩者仍有下列幾點不同：

(1) CARR 模型中，range 的取樣是在固定時間內測量，但 ACD 模型中，duration 的取樣則是隨機決定，不過兩者的樣本觀察值皆為正數。

(2) CARR 模型極端值的選取是統計上的結果。

(3) CARR 模型是變幅模型，但卻可以用來衡量波動性。

R_t 表示股票價格 P_t 取自然對數後之變幅，即 $R_t = \ln P_t^{High} - \ln P_t^{Low}$ ；λ_t 表示 R_t 在 t 期的條件平均數，亦即 $\lambda_t \equiv E(R_t \mid I_{t-1})$ ，$\lambda_t \geq 0$ ；ε_t 為來自相同分配函數的干擾因子，且不同期別間的干擾因子彼此為獨立，其平均數及變異數皆為 1；ω 表示變幅行程之內在的不確定性，也可代表對數化變幅的起始水準，且 $w > 0$ ；α_i 是變幅的落後期項係數，可以代表變幅對條件變幅期望值之短期影響，且 $\alpha_i \geq 0$ ，$i = 1,..., p$ 。β_j 是變幅條件均數落後期的係數，可用以協助說明長期的影響效果，且 $\beta_j \geq 0$ ，$j = 1,..., q$ 。

另外 $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j$ 在刻畫條件變幅變動的持續性效果上隱含重要的經濟意義。就長期條件變幅的穩定條件方面，CARR 模型需滿足 $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$ ，另外，其非條件均數為 $\overline{\omega} = \omega/(1-(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j))$ ，代表（$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j$）愈大，則非條件均數($\overline{\omega}$)的數值就會愈大，代表波動持續性愈強。

根據 Chou(2002)，我們可以假設 ε_t 的分配函數滿足以 1 為均數的指數分配，則 CARR 模型的對數概似函數(log likelihood function)可表示如下[4]：

$$L(\omega, \alpha_i, \beta_j; R_1, ..., R_T) = -\sum_{t=1}^{T}[\ln(\lambda_t) + \frac{R_t}{\lambda_t}] \tag{2}$$

就 CARR 模型的應用性層面而言，可以在其條件變幅期望值方程式中引入其他外生變數，以配合資料屬性的實際需要，因而條件變幅期望值方程式的表現方法可以進一步改寫為(3)式所示：

$$\lambda_t = \omega + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^{q}\beta_j \lambda_{t-j} + \sum_{l=1}^{L}\phi_l X_{t-1,l} \tag{3}$$

[3]關於不對稱性方面，本文第肆部分之實證分析中有進一步說明。
[4] Engle 和 Russell(1998)導出，此種分配之設定可得到具有一致性之參數估計量。

此模型可以稱為 CARRX 模型，根據實證分析的需要，(3)式中可引入相關的財務變數，例如成交量(值)、報酬率的落後期、星期效應、漲跌幅限制…等等。針對股票市場中普遍存在的槓桿效果(leverage effect)，本文擬在後續之實證分析時，將報酬率落後期納入做為外生變數，藉由報酬率落後期的引入，來檢視台灣股票市場的交易資料中[5]是否存在槓桿效果。

實證分析進行過程中，雖然 CARR 模型可以使用準最大概似法(Quasi-Maximum-Likelihood Estimation method，QMLE)來進行模型係數的估計，但 Engle 和 Russell(1998)認為，參數的估計在 QMLE 之下，可以得到具統計一致性的估計值，然而直接用這個方法所求得之參數的共變異數矩陣並不符合統計上的一致性。因此，本文在估計上，採用 Bollerslev 和 Wooldridge(1992)提出的 Robust 標準差估計法, 以解決參數估計變異數未能符合統計一致性的問題。

由於波動性變數，並無法由市場實際交易資料觀察而得，就週資料之下的波動性而言，我們選取的真實波動性[6] (realized volatility)，乃採用當週交易日的每日報酬率平方和(Sum of Square Daily Return，SSDR)、週報酬率的平方(Weekly-Return-SQuared，WRSQ)、週變幅(Weekly RaNGe，WRNG)及週報酬率的絕對值(Absolute Weekly -RETurn，AWRET)，來當做真實波動性的代理變數，並與 CARR 模型之下，所求得的估計值相互比較，而由於 GARCH 模型是典型而且被慣用的波動性模型之一，因此，我們亦納入分析，當做對照組的方式，加以比較說明。本文採用迴歸的方式，評比 CARR 模型及 GARCH 模型的樣本內波動性預測能力，據此，我們可以建構底下的三條迴歸方程式：

$$MV_t = \gamma_0 + \gamma_1 FV_t(CARR) + u_t \tag{4}$$

$$MV_t = \gamma_0 + \gamma_2 FV_t(GARCH) + u_t \tag{5}$$

$$MV_t = \gamma_0 + \gamma_1 FV_t(CARR) + \gamma_2 FV_t(GARCH) + u_t \tag{6}$$

[5] Black (1976)和 Christie(1982)曾說明槓桿效果（leverage effect），直觀而言，就是負面的消息會使得股價下跌，導致資本結構比率（D／E ratio）上升，造成股價波動性增加；相反的，若是同幅度正面消息，則影響股票波動性變動的幅度，則不如負面消息的影響力。

[6]所謂真實波動性是指因為真正的波動性並無法獲得，故使用其他估計波動性的統計量代替真正的波動性，這些被選取的統計量稱為真實波動性。

其中 MV_t (measured volatility)可以當做前述四項真實波動性的代理變數(proxy)；$FV_t(CARR)$ 和 $FV_t(GARCH)$ 分別表示以 CARR 模型及 GARCH 模型所估計出的週波動性估計值。

在模型係數的檢定方面，以(4)式為例，若係數 γ_0 的估計值 $\hat{\gamma}_0$ 未顯著異於 0 且係數 γ_1 的估計值 $\hat{\gamma}_1$ 未顯著異於 1，則表示 CARR 模型所求得的波動性是真實波動性的不偏估計值。若只得到 $\hat{\gamma}_1$ 顯著異於 0 的檢定結果，則表示 CARR 模型所求得的波動性仍具有預測能力。除此之外，配合(4)式與(5)式模型係數的表現，亦可以分析不同模型下的解釋能力，本文採調整後判定係數（Adj.R-squared）當做 CARR 模型及 GARCH 模型對波動性解釋能力的指標之一。另外，(6)式中係數 γ_1 與係數 γ_2 的估計值在統計顯著性的表現，也可以評比 CARR 模型和 GARCH 模型對真實波動性的相對解釋能力。

就 CARR 模型及 GARCH 模型在樣本外預測能力的比較上，本研究的作法如下：若以 CARR(1,1)模型為例，可以利用遞迴的方法，求出第 k 期樣本外估計值的一般式[7]，方法如下：

樣本外一期預測：

$$\lambda_{t,t+1}^f = E(\lambda_{t+1} \mid I_t) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}R_t + \hat{\beta}\lambda_t$$

樣本外兩期預測：

$$\begin{aligned}
\lambda_{t,t+2}^f &= E(\lambda_{t+2} \mid I_t) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}E(R_{t+1} \mid I_t) + \hat{\beta}E(\lambda_{t+1} \mid I_t) \\
&= \hat{\omega} + \hat{\alpha}E(\lambda_{t+1} \mid I_t) + \hat{\beta}E(\lambda_{t+1} \mid I_t) \\
&= \hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})E(\lambda_{t+1} \mid I_t) \\
&= \hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})\hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^2 \lambda_t
\end{aligned}$$

[7] 其中 λ_t 是由樣本內共 t 期資料所求得的第 t 期變幅的條件平均數。

因此，樣本外 k 期預測，可以表示成下列通式解：

$$\lambda^f_{t,t+k} = E(\lambda_{t+k} \mid I_t) = \frac{\hat{\omega}(1-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})^k)}{1-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})} + (\hat{\alpha}+\hat{\beta})^k \lambda_t \tag{7}$$

其中 $\lambda^f_{t,t+k}$ 表示已知 t 期之前的資訊下，對 $t+k$ 期變幅條件平均數所做的預測。另外，傳統 GARCH(1,1)模型其樣本外估計值的一般式則如(8)式所示：

$$h^f_{t,t+k} = E(h_{t+k} \mid I_t) = \frac{\hat{\omega}(1-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})^k)}{1-(\hat{\alpha}+\hat{\beta})} + (\hat{\alpha}+\hat{\beta})^k h_t \tag{8}$$

其中 $h^f_{t,t+k}$ 表示在已知前 t 期的資訊下，對 $t+k$ 期報酬率其條件變異數所做的預測。

在樣本外預測能力的評比指標上，本文採用均方根（Root Mean Square Error，RMSE）及平均絕對誤差（Mean Absolute Error，MAE）指標來衡量此二模型在預測能力上的表現，值得注意的是 CARR 模型及 GARCH 模型所選取的樣本分別為變幅及報酬率，因此純就誤差的數值而言，兩者比較基礎並不一致，所以有必要進行標準化的動作，使其在相同基準點上進行模型間的比較。

假設預測樣本外的時間點為 $t = T+1, T+2, ..., T+\tau$，而在 t 時點波動性的實際值及估計值為 V_t 及 FV_t，則預測誤差的統計值可以表示為(9)、(10)式：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{t=T+1}^{T+\tau}(FV_t - V_t)^2} \tag{9}$$

$$MAE = \frac{1}{\tau}\sum_{t=T+1}^{T+\tau}\left| FV_t - V_t \right| \tag{10}$$

由於在第 t 日所觀察到的真實波動性 V_t，實際上是無法具體求得的，故本文沿用前述樣本內預測能力評比時所採用的 MV_t 值，代替真實的波動值。另外，CARR 模型及 GARCH 模型所估計出的波動性 FV（forecasted volatility）與 MV 值之間存在尺規(scale)上的差異，因此在計算誤差統計量時需將 FV 調整為修正後的波動性估計值（adjusted forecasted volatility，AFV），調整方法如(11)式所示：

$$MV_t = \psi FV_t + u_t,\quad t = 1, ..., T \tag{11}$$

$$AFV = \psi FV$$

參、資料分析

實證研究部份，本文針對台灣集中市場發行量加權股價指數週資料進行分析，起迄時間為 1988 年 6 月 13 日至 2003 年 10 月 3 日止，計有 795 筆變幅及報酬率週資料觀察值[8]。資料來源取自於台灣經濟新報社的資料庫。

研究期間樣本相關之敘述統計量，整理於表 1。值得特別說明的是 CARR 模型及 GARCH 模型在衡量波動性上的取樣對象不同，CARR 模型是擷取股價指數極端值的變動範圍，即變幅（range）；而 GARCH 模型則是選取每個區間指數的變動率，即報酬率（return）。本文所定義的報酬率及指數變動範圍(變幅)的計算方式如下所示：

變幅$=100\times[(\ln(P_t^{high})-\ln(P_t^{low})]$

報酬率$=100\times[\ln(P_t^{close})-\ln(P_{t-1}^{close})]$

表 1：台灣股價指數週資料之統計特性分析

	週資料	
	變幅（WRNG）	報酬率（WRET）
樣本數	795	794
平均數	6.304	0.012
中位數	5.336	0.376
最大值	31.865	22.026
最小值	0.522	-25.342
標準差	3.819	4.861
偏態係數	2.160	-0.333
峰態係數	10.020	6.477
Jarque-Bera	2250.819(0.000)	414.502(0.000)

1. Jarque-Bera 列中的括號內數字代表 p-value。
2. WRNG 代表週資料之下的變幅，WRET 代表週資料之下的報酬率。
3. 研究期間為 1988 年 6 月 13 日至 2003 年 10 月 3 日，共 795 筆週資料。
4. 其他說明可參考正文內容。

[8] 台灣新報之台股指數資料，自 1988 年 6 月 13 日起開始有當日最高價及最低價的記載。另外在樣本期間內原應有 799 週，但因為其中 4 週（1994、1998、2001、2002）因年假而無交易記錄，故予以捨棄。

表 1 為變幅及報酬率的統計特性分析，關於樣本分配的常態性檢定上，本研究以 Jarque-Bera(JB) [9]的統計量為指標，由表 1 可看出，週變幅資料的 JB 值為 2250.819，週報酬率資料的 JB 值為 414.502，兩組資料 JB 值都明顯拒絕了常態分配的虛無假設。另外變幅及報酬率資料的峰態係數都顯著大於 3，代表資料均呈現高狹峰（leptokurtic）的現象，可以支持採用 CARR 模型及 GARCH 模型來進行進一步的分析工作。

由圖 1 週變幅及週報酬率的走勢圖可看出, 變幅資料的變動情形較報酬率資料緩和, 亦即行進間的變動較小。圖 1 所揭示的就經濟直覺而言，利用變幅為因變數的模型進行預測時，所求得的估計值應該比採用報酬率為因變數的模型具有相對準確性，但會不會因此而喪失其在短期內的預測能力，則值得進一步加以探討。

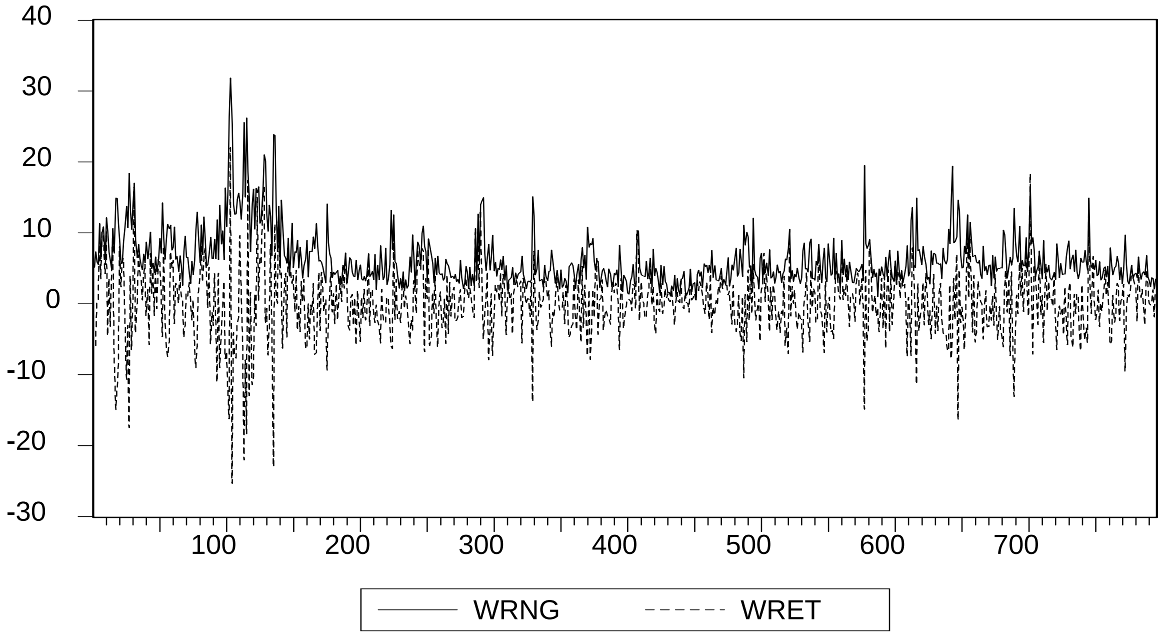

圖 1：台灣股價指數週資料變幅及報酬率走勢圖

[9] Jarque-Bera=$\frac{N}{6}(S^2+\frac{1}{4}(K-3)^2)$ $\chi^2(2)$，可以對樣本分配進行常態性檢定，虛無假設為樣本服從常態分配，N 為樣本個數、S 為偏態係數、K 為峰態係數，又當顯著水準 $\alpha=5\%$，則 $\chi^2_{1-\alpha}(2)=5.99$，即在 95% 的信賴區間下，若所求得樣本的 Jarque-Bera 值大於臨界值 5.99 時，則拒絕常態分配的假設。

肆、實證分析

此部分將進一步探討 CARR 模型在實證分析上的表現，以及利用 CARR 模型及 GARCH 模型分別進行樣本內及樣本外預測能力的比較。關於樣本內預測能力的比較方面，針對台灣發行量加權股價指數週資料進行 CARR 模型及 GARCH 模型下樣本內預測能力的比較，選取 1988 年 6 月 13 日至 2003 年 10 月 3 日為止的大盤股價指數資料，計有週資料 795 筆。其次，關於樣本外預測能力的比較方面，將針對台灣發行量加權股價指數週資料進行分析，藉以比較 CARR 模型及 GARCH 模型的中長期表現。

以下先進行週資料樣本內的預測能力進行分析，在進行預測前，有必要先對模型參數做估計，以期達到一個客觀的比較水準，在參數的取捨上主要是參考 LR（Likelihood Ratio） test[10]的結果及所引入係數是否顯著兩方面來判斷。

一、CARR 模型及 GARCH 模型的參數估計

（一）CARR 模型的參數估計

表 2 為 CARR(1,1)、CARR(1,2)及 CARR(2,1)模型配適市場實際交易資料的結果。由表 2 及 LR test 可知，因為 CARR(1,2)模型的 LLF(Log Likelihood Function)為-1835.809、CARR(2,1)模型為-1835.308，相較於 CARR(1,1)模型的 LLF 為-1835.310，意謂著並沒有因為解釋變數的增加而明顯改善。且 CARR(1,2)模型中係數 β_2 的估計值為 0.017，其 t 值為 0.110，CARR(2,1)模型中，係數 α_2 的估計值為-0.012，其 t 值為-0.195，就統計檢定而言，並無法拒絕係數值為 0 的虛無假設。因此在預測上，採用 CARR(1,1)模型相對較為恰當。

---

10 $LR = -2(L_{null} - L_{alternative}) \sim \chi^2(k)$，其中 k 表示在對立假設下多引進的解釋變數個數。當 k=1 及顯著水準 $\alpha = 5\%$ 時，若 $LR > \chi^2_{1-\alpha}(1) = 3.841$，則拒絕虛無假設。

表 2：台股指數週變幅（1988/06/03~2003/10/03）之 CARR 模型估計結果

$$R_t = \lambda_t \varepsilon_t$$

$$\lambda_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \lambda_{t-j}$$

$$\varepsilon_t \sim iid \quad f(.)$$

	CARR(1,1)	CARR(1,2)	CARR(2,1)
log likelihood func.	-1835.310	-1835.809	-1835.308
ω	0.387(3.409)	0.387(3.371)	0.372(2.841)
α_1	0.263(8.394)	0.265(6.471)	0.267(6.524)
α_2			-0.012(0.195)
β_1	0.674(16.744)	0.655(3.498)	0.684(11.613)
β_2		0.017(0.110)	
ρ_1	0.014	0.012	0.010
ρ_{12}	0.050	0.049	0.049
Q(12)	7.310(0.836)	7.365(0.833)	7.399(0.830)

1. R_t 為每週股價指數之變幅，亦即每週內指數取對數後之高低價差。
2. 括號的值表示 t-value with robust standard error 或 p-value。
3. ρ_1、ρ_{12} 為殘差項的 1 階、12 階自我相關係數。
4. Q(12)表示殘差項落後 12 期的 Q 統計值，其虛無假設表示直到 12 期之前不存在統計上的自我相關。
5. 其他說明，請參考正文。

（二）GARCH 模型的參數估計

表 3 為 GARCH(1,1)、GARCH(1,2)及 GARCH(2,1)模型配適市場實際交易資料的結果。由表 3 及 LR test 可知，因為 GARCH(1,2)模型的 LLF 為-2294.343、GARCH(2,1)模型為-2294.328，相較於 GARCH(1,1)模型的 LLF 為-2294.350 並沒有因為新解釋變數的引入而明顯增加模型解釋能力。且 GARCH(1,2)模型中係數 β_2 的估計值為 0.030，其 t 值為 0.082，GARCH(2,1)模型中，係數 α_2 的估計值為-0.014，對應之 t 值為-0.236，就一般的統計顯著水準而言，並無法拒絕係數值 0 的虛無假說。因此在預測上，採用 GARCH(1,1)模型在 GARCH 族模型的選取上，相對較為適當。

在模型殘差項的序列相關方面，由表 2 和表 3，比較 CARR(1,1)模型及 GARCH(1,1)模型可明顯看出，後者殘差項的序列相關程度較前者為高。另外在處理相同研究期間之下，比較 CARR 模型及 GARCH 模型的係數，可以看出 CARR(1,1)模型的係數α_1的估計值 0.263 的確較 GARCH(1,1)模型的係數α_1的估計值 0.131 為高，似乎可以說明 CARR 模型對於短期反應的敏感度較 GARCH 模型為佳，此一命題可以藉由實證研究結果加以檢視。

表 3：台股指數週報酬（1988/06/03~2003/10/03）之 GARCH 模型估計結果

$$y_t = \varepsilon_t$$
$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}$$
$$\varepsilon_t \mid \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

	GARCH(1,1)	GARCH(1,2)	GARCH(2,1)
log likelihood func.	-2294.350	-2294.343	-2294.328
ω	1.163(1.981)	1.183(1.726)	1.098(1.877)
α_1	0.131(3.798)	0.134(2.361)	0.139(2.423)
α_2			-0.014(0.236)
β_1	0.815(16.577)	0.782(1.808)	0.825(16.044)
β_2		0.030(0.082)	
ρ_1	0.036	0.036	0.036
ρ_{12}	-0.117	-0.017	-0.018
Q(12)	21.388(0.045)	21.448(0.044)	21.555(0.043)

1. y_t為每週股價指數之報酬率。
2. 括號的值表示 t-value with robust standard error 或 p-value。
3. ρ_1、ρ_{12}為殘差項的 1 階、12 階自我相關係數。
4. Q(12)表示殘差項落後 12 期的的 Q 統計值，其虛無假設表示直到 12 期之前不存在統計上的自我相關。
5. 其他說明請參考正文。

二、CARR(1,1)及 GARCH(1,1)模型的樣本內預測能力比較

檢驗不同波動性模型的樣本內預測能力方面，本文進行三方面的迴歸分析，如表 4 所示。首先，就週資料而言，解釋變數的顯著性檢定方面，解釋變數為 CARR 模型及 GARCH 模型所估計的樣本內波動性，分別以 FV_t(CARR)及 FV_t(GARCH)表示，當解釋變數 FV_t(CARR)及 FV_t(GARCH)個別引入模型時，無論 MV 為 SSDR、WRSQ、WRNG 或 AWRET，所得到係數皆顯著異於 0；但當兩者同時引入模型時，可以清楚看出解釋變數 FV_t(GARCH)的係數 γ_2 之估計值已變得不顯著（其 t-value 分別為-0.181、-2.051、-0.402 及-1.134），但解釋變數 FV_t(CARR)的係數 γ_1 之估計值仍然顯著異於 0，由此可知，CARR(1,1)模型所估計出的波動性對於 MV 各種代理變數的解釋能力相較於 GARCH(1,1)為佳。

其次，在解釋變數 FV_t(CARR)及 FV_t(GARCH)分別引入模型後的配適效果，本文以調整後判定係數（Adj.R-squared）為評比指標，藉以說明變數對模型的解釋能力，不管 MV 為 SSDR、WRSQ、WRNG 或 AWRET，當解釋變數為 FV_t(CARR)時，所得到的調整後判定係數值分別為 0.526、0.197、0.453 及 0.177，相較於解釋變數為 FV_t(GARCH)時，所得到的調整後判定係數值分別為 0.468、0.136、0.395 及 0.144 皆較大，表示 FV_t(CARR)比 FV_t(GARCH)更適合解釋 MV 的變異性，與前述採 t 值的推論一致。由上述說明可知，關於台股大盤指數週資料樣本內預測能力的比較上，CARR 模型較 GARCH 模型更能掌控波動性的變動行程。此一推論與 Chou(2002)針對 S&P500 所推得的結論具有一致性，支持取樣為台灣發行量加權股價指數週資料，抑或是 S&P500 股價指數週資料，在捕捉波動性變動的行程上，CARR 模型的表現皆優於傳統的 GARCH 模型。

表 4：CARR(1,1)及 GARCH(1,1)在大盤指數週資料的樣本內預測能力比較

$$MV_t = \gamma_0 + \gamma_1 FV_t(CARR) + u_t$$

$$MV_t = \gamma_0 + \gamma_2 FV_t(GARCH) + u_t$$

$$MV_t = \gamma_0 + \gamma_1 FV_t(CARR) + \gamma_2 FV_t(GARCH) + u_t$$

MV	γ_0		γ_1		γ_2		Adj.R-squared	Durbin-Watson
SSDR	0.571	(0.484)	0.429	(13.885)			0.526	1.713
SSDR	0.088	(0.061)			0.859	(11.994)	0.468	1.392
SSDR	0.668	(0.484)	0.442	(6.133)	-0.029	(-0.181)	0.526	1.719
WRSQ	-1.867	(-0.369)	0.562	(4.165)			0.197	1.885
WRSQ	0.588	(0.130)			0.991	(4.105)	0.136	1.807
WRSQ	2.101	(0.557)	1.154	(3.028)	-1.327	(-2.051)	0.221	1.838
WRNG	-0.355	(-0.872)	1.060	(14.961)			0.453	1.807
WRNG	-0.594	(-1.298)			1.516	(13.883)	0.395	1.504
WRNG	-0.287	(-0.681)	1.120	(6.533)	-0.096	(-0.402)	0.453	1.815
AWRET	-0.055	(-0.115)	0.575	(6.815)			0.177	1.996
AWRET	-0.063	(-0.122)			0.795	(6.471)	0.144	1.944
AWRET	0.143	(0.301)	0.750	(3.935)	-0.286	(-1.134)	0.178	1.985

1. 括號內為以 White Heteroskedasticity-Consistent Standard Errors & Covariance 計算所得的 t-value。
2. 本文取 4 項指標當做 MV(Measured Volatility)的代理變數，分別為大盤指數當週(calendarweek)內每交易日的日報酬率平方和(Sum of Square Daily-Return，SSDR)、週報酬率的平方(Weekly-Return-SQuared，WRSQ)、週變幅(Weekly RaNGe，WRNG)及週報酬率的絕對值(Absolute Weekly-RETurn，AWRET)。
3. $FV_t(CARR)$ 和 $FV_t(GARCH)$ 分別表示以 CARR(1,1)及 GARCH(1,1)所估計出的大盤指數週波動性，若 MV 為 SSDR 及 WRSQ 時，分別表示其變異數；又若 MV 為 WRNG 及 AWRET 時，分別表示其標準差。
4.樣本期間為 1988 年 6 月 13 日至 2003 年 10 月 3 日，計有 795 筆。
5.其他說明請參考正文。

而在表 4 中的最後一欄整理出 Durbin-Watson[11]的值，表示迴歸分析方程式中殘差項 u_t 線性一階相關的情形，由此結果亦可看出當解釋變數為 FV_t(CARR)時，殘差項會較接近無自我相關，就統計的術語而言，意謂著選用解釋變數 FV_t(CARR)相對於採用解釋變數 FV_t(GARCH)在捕捉波動性行程上表現較佳。

[11]若 Durbin-Watson 越接近 2 表示越不存在一階線性自我相關。

三、CARR(1,1)及 GARCH(1,1)模型的樣本外預測能力比較

在樣本內的預測上支持以 CARR(1,1)及 GARCH(1,1)分別代表 CARR 族及 GARCH 族進行估計，故在樣本外的預測能力比較上，我們仍維持樣本內參數估計的結果，以週資料為樣本基礎下進行分析。關於模型樣本外估計的研究方法，茲說明如下：

（一）先以整體樣本之 1　644 筆為樣本內資料，分別得到其所配適的 CARR(1,1)及 GARCH(1,1)模型之所有參數，並分別以此二者估計第 645 期的波動性，此即為所得到的第 1 筆之第 1 期樣本外波動性估計值；接著再估計第 646 期的波動性，此即為所得到第 1 筆之第 2 期樣本外波動性估計值；依此類推，連續這一個動作，估計至第 696 期的波動性，此即為所得到第一筆之第 52 期樣本外波動性估計值。

（二）接著再以 2　645 筆為樣本內資料，重複前述之步驟，可得到第 2 筆之第 1 期至第 52 期樣本外波動性估計值。

（三）延續前一步驟，接著以 3　647 筆、4　648 筆、…、100　743 筆為樣本內資料，可得到第 3 筆至第 100 筆之第 1 期至第 52 期樣本外波動性估計值。

（四）最後再將所得到各期調整後的樣本外估計值 FV(CARR)及 FV(GARCH)和 MV 代入 RMSE 及 MAE 的計算式中[12]，我們將結果整理於表 5。

如表 5 所示，CARR 模型所得到的預測誤差 RMSE 及 MAE 均小於於 GARCH 模型，此說明了 CARR 模型在樣本外的預測上較 GARCH 模型準確。

[12]在 52 期樣本外估計，每一期樣本外估計值共有 100 筆觀察資料。

表 5：台股指數樣本外估計誤差比較

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{t=T+1}^{T+100}(AFV_t - MV_t)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{100}\sum_{t=T+1}^{T+100}| AFV_t - MV_t |$$

RMSE	SSDR		WRSQ		WRNG		AWRET	
樣本外期數	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH
1	14.613	16.100	47.032	48.358	2.396	2.566	3.101	3.180
2	16.008	17.927	50.431	51.865	2.637	2.848	3.253	3.354
3	15.787	17.981	50.059	51.714	2.653	2.898	3.244	3.352
4	15.755	17.464	45.480	45.779	2.644	2.840	3.070	3.121
13	13.426	14.694	43.804	44.296	2.498	2.674	2.983	3.046
26	12.873	13.299	43.508	43.677	2.426	2.495	2.943	2.958
52	12.010	12.776	40.939	41.078	2.325	2.467	2.809	2.839

MAE	SSDR		WRSQ		WRNG		AWRET	
樣本外期數	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH
1	10.389	11.926	24.426	24.783	1.799	1.948	2.260	2.317
2	11.120	12.678	25.143	25.762	1.950	2.148	2.283	2.366
3	11.292	12.797	25.475	25.921	2.011	2.192	2.299	2.373
4	11.373	12.420	23.440	23.554	2.026	2.172	2.205	2.260
13	9.758	11.067	22.013	22.878	1.885	1.999	2.170	2.227
26	9.343	10.184	21.260	21.948	1.775	1.902	2.127	2.166
52	9.085	10.333	20.525	21.367	1.848	2.041	2.091	2.168

1. 樣本期間為 1988 年 6 月 13 日至 2003 年 10 月 3 日，共 795 筆大盤指數週資料。
2. 本表的估計模型分別為 CARR(1,1)及 GARCH(1,1)。
3. AFV_t 為調整後的波動性估計值。

四、頑強性（Robustness）檢定

為了加強樣本外預測能力比較的論證，本文另外以台灣店頭市場（Over The Counter，OTC）指數為樣本，進行樣本外預測能力比較。選取期間為 1996 年 1 月 4 日至 2003 年 10 月 3 日止，計有 402 筆變幅及報酬率週資料觀察值[13]。由表 6 可看出，除樣本外第 26

[13]在樣本期間內原應有 405 週，但因為其中 3 週（1998、2001、2002）因年假而無交易記錄，故予以捨棄。另外在 1996 年之前因店頭市場交易並不熱絡，所以並未採用。因為資料上的限制，故樣本外預測期數及

期之 RMSE 值外，CARR 模型所得到的預測誤差皆小於 GARCH 模型，此結果更加強化本文的推論。

表 6：OTC 指數樣本外估計誤差比較

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{50}\sum_{t=T+1}^{T+50}(AFV_t - MV_t)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{50}\sum_{t=T+1}^{T+50}| AFV_t - MV_t |$$

RMSE	SSDR		WRSQ		WRNG		AWRET	
樣本外期數	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH
1	14.395	16.078	54.419	55.420	2.714	2.915	3.430	3.503
2	15.445	16.454	57.314	57.564	2.903	3.040	3.628	3.673
3	15.720	16.656	57.195	57.227	2.888	3.023	3.623	3.660
4	16.068	16.978	57.908	58.382	2.985	3.158	3.683	3.752
13	13.193	14.221	30.670	32.412	2.456	2.655	2.905	3.024
26	12.852	13.434	28.539	28.528	2.596	2.704	2.762	2.740
52	11.168	13.166	19.636	21.975	2.873	3.130	2.431	2.551

MAE	SSDR		WRSQ		WRNG		AWRET	
樣本外期數	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH	CARR	GARCH
1	10.297	12.367	28.066	30.379	1.979	2.183	2.564	2.709
2	11.592	12.874	30.425	32.312	2.173	2.274	2.740	2.871
3	11.927	12.977	30.541	32.554	2.148	2.295	2.733	2.868
4	11.987	13.119	31.276	33.750	2.223	2.429	2.777	2.940
13	11.024	11.941	23.591	25.875	2.052	2.262	2.496	2.626
26	10.840	11.705	21.865	23.158	2.197	2.329	2.366	2.399
52	10.272	12.090	18.189	20.257	2.586	2.834	2.202	2.329

1. 樣本期間為 1996 年 1 月 4 日至 2003 年 10 月 3 日，共 402 筆 OTC 指數週資料。
2. 本表的估計模型分別為 CARR(1,1)及 GARCH(1,1)。
3. AFV_t 為調整後的波動性估計值。

觀測值皆更改為 50 筆。資料來源為台灣經濟新報資料庫。

五、CARR 模型的延伸

Chou(2002)主張 CARR 模型在不對稱性質[14]的衡量上較 GARCH 模型相對容易表現。關於不對稱性質，Black (1976)和 Christie(1982)提出槓桿效果（leverage effect）來加以解釋，也就是說負面的消息會使得股價下跌，導致資本結構比率（D／E ratio）上升，增加了違約風險，造成股價波動性增加。關於不對稱性質的處理，CARR 模型在實證方法上可以直接將報酬率的落後期納入條件變幅平均數方程式中，即為 CARRX 族模型，如(12)式所示。

$$\lambda_t = \omega + \alpha R_{t-1} + \beta\lambda_{t-1} + \phi(ret_{t-1}) \tag{12}$$

其中 r_{t-1} 為報酬率落後期。藉由係數 ϕ 的表現來判斷前一期的正負報酬對當期波動性的影響。

另外亦可仿照 TGARCH 模型，發展出 TCARR 模型，如(13)式所示。我們藉由引入實際交易資料下的模型估計，討論係數的顯著性及 LR test 的結果。

$$\lambda_t = \omega + \alpha R_{t-1} + \beta\lambda_{t-1} + \gamma K R_{t-1} \tag{13}$$

其中 K 為虛擬變數，當前一期報酬為正時，K=0；反之則為 1。R_{t-1} 為變幅的落後期。這是為了強化前一期負報酬率對當期波動性的影響。

本文將(12)及(13)式配適大盤指數日資料之後的結果來加以說明，茲將實證結果整理於表 7。CARRX(1,1)模型中的係數 ϕ 估計值為-0.025，其對應的 t 值為-4.719，且若以 LR test 做檢驗，則 LR 的值為 9.706，表示報酬率落後期的引入，對於模型解釋能力確實有顯著的改善。值得注意的是報酬率落後期項的係數 ϕ 估計值為-0.025，此與投資學理論相符合，表示當負面消息來臨時，即前一期報酬率為負的情況下，會造成下一期較大的波動，後續研究若以 CARR 模型對日資料進行分析時，值得將報酬率的落後期納入模型中。同理，在 TCARR(1,1)模型的表現上，亦能改善不對稱效果的影響。

[14]不對稱性指的是相同程度的好消息及壞消息所引起的波動大小並非對稱的，或稱為槓桿效果。

表 7：台股指數日變幅（1988/06/03~2003/10/03）之 CARR 模型估計結果

	CARR(1,1)	CARRX(1,1)	TCARR(1,1)
log likelihood function	-7400.566	-7395.713	-7398.035
ω	0.059(6.153)	0.063(6.636)	0.058(6.216)
α	0.206(17.343)	0.202(17.413)	0.184(14.897)
β	0.765(55.249)	0.767(56.446)	0.771(57.633)
ϕ（γ）		-0.025(-4.719)	0.032(3.821)
ρ_1	0.041	0.045	0.038
ρ_2	0.019	0.023	0.020
ρ_{12}	-0.001	0.001	0.002
Q(12)	22.013(0.037)	21.504(0.043)	17.523(0.131)

1. 括號的值表示 t-value with robust standard error 或 p-value。
2. ρ_1、ρ_{12} 為殘差項的 1 階、12 階自我相關係數。
3. 其他說明，請參考正文。

伍、結論

自從 Engle(1982)提出 ARCH 模型以來，已經超過 20 年，實證上也有相當多的文獻探討關於 ARCH 族模型的應用，Chou(2002)將 GARCH 模型結合 Parkinson(1980)所提出變幅在波動性預測上的概念，提出了 CARR 模型。本文以台灣發行量加權股價指數為研究對象，探討 CARR 模型在波動性預測上的適用性，並透過樣本內與樣本外的預測能力比較，證實對於台灣股票市場資料而言，CARR 波動性模型表現優於 GARCH 波動性模型。

事實上，變幅的觀念早已在各主要的財經報導與傳播媒體中被普遍的接受，例如表現在所謂的蠟燭圖(candlestick plots)或稱做 K 線圖，圖形可以表現出最高價、最低價及收盤價。此亦為常見之技術分析的指標之一，然而變幅的理論模型與實證研究，相對而言，並不算很多，尤其是表現在台灣的金融市場資料。

本文所得到的推論，大致可歸納為下列三點：

一、在台股指數週資料波動性的樣本內及樣本外預測上，皆得到 CARR 模型優於 GARCH 模型的推論，除了樣本內的預測上符合 Chou(2002)的論點，更進一步在樣本外預測上也得到一致性的推論。另外藉由 OTC 指數波動性的樣本外預測能力比較結果更加強化 CARR 模型的適用性。

二、在 CARR 模型的延伸上，報酬率及變幅落後期適當引入條件變幅期望值方程式，則可以捕捉股票益市場中常可觀察到的槓桿效果，由實證分析結果可知，前一期的壞消息，會造成下一期較大的波動，這與投資學的理論相符合。

三、相對於 GARCH 模型只採用收盤價進行波動性預測，CARR 模型引入了最高價及最低價兩種不同資訊協助建立模型並進行波動性行為的分析，由此觀點而言，CARR 模型所蘊含的市場資訊相對豐富，因此在波動性行為的預測上，CARR 模型應該可以較 GARCH 模型精確，透過本文實證結果，亦可驗證此一論點，顯現出變幅在波動性的衡量上的確較報酬率為佳。

參考文獻

1. Alizadeh, S., M. Brandt, and F. Diebold (2002), “Range-based estimation of stochastic volatility models,” *Journal of Finance* ,57, 1047-1091.
2. Andersen, T., and T. Bollerslev (1997), “Heterogeneous information arivals and return volatility dynamics: Uncovering the long run in high frequency returns,” *Journal of Finance* ,52, 975-1005.
3. Ballie, R. T., and R.P. DeGennaro (1990), “Stock Returns and Volatility,” *Journal of Finance and Quantitative analysis*, 25, 203-214.
4. Black, F. (1976), “Studies of Stock Price Volatility Changes,” Proceeding of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, 177-181.

5. Brandt, M.W., and C.S. Jones (2002), "Volatility Forecasting with Ranged-Based EGARCH Models,"working paper,University of Pennsylvania,USA.
6. Bollerslev, T., R. Chou, and K. Kroner (1992), "ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence," *Journal of Econometrics* ,52, 5-59.
7. Bollersleve, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
8. Bollerslev, T., R. Engle, and D. Nelson (1994), "ARCH models," in Handbook of Econometrics, IV, 2959-3038, ed.Engle,R.F., and McFadden,D.C., Amsterdam: North-Holland
9. Bollerslev, T., R. Engel, and J. Wooldridge (1988), "A Capital Asset Pricing Model with Timing-vary Covariance," *Journal of Political Economy*, 96, 116-131.
10. Bollerslev, T., and J. Wooldridge (1992), "Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances," *Econometric Reviews*, 11, 143-172.
11. Cassuto, A.E. (1995), "Non-Normal Error Patterns: How to Handle Them," *The Journal of Business Forecasting: Methods and Systems*, 14, 15-16.
12. Chou, R. (2002), "Forecasting financial volatilities with extreme values: the Conditional AutoRegressive Range (CARR) Model," Working paper, The Institute of Economics Academia Sinica, Taiwan.
13. Christie, A.A., (1982), "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value,Leverage, and Interest Rate Effects," *Journal of Financial Economics*, 10, 407-432.
14. Engle, R. (1982), "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation," *Econometrica*, 50, 987-1008
15. Engle, R., and V, Ng (1993), "Measuring and testing of the impact of news on volatility," *Journal of Finance*, 48, 1749-1778.
16. Engle, R., and J. Russell (1998) "Autoregressive conditional duration: a new model for irregular spaced transaction data," *Econometrica*, 66, 1127-1162.
17. Fama, E. F. (1965), "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38, 34-105.
18. French, K., W. Schwert, and R. Stambaugh (1987), "Expected stock returns and volatility," *Journal of Financial Economics*, 19, 3-29.

19. Galant, A., C. Hsu, and G. Tauchen (1999), “Calculating volatility diffusions and extracting integrated volatility,” *Review of Economics and Statistics*, 81, 617-631.

20. Glosten, L.R., R. Jagannathan, and D. Runkle (1993), “On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks,” *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.

21. Hull, J. and A. White (1987), “The pricing of options on assets with stochastic volatilities,” *Journal of Finance*, 42, 281-300.

22. Ljung, G.M., and G.E.P. Box (1978), “On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models,” *Biometrika*, 65, 297-303.

23. Mandelbrot, B. (1963), “The Variation of Certain Speculative Prices,” *Journal of Business*, 36, 294-419.

24. Morgan , I.G.(1976), ”Stock Price and Heteroskedasticity,” *Journal of Business*, 49, 496-508.

25. Nelson, D.B. (1991), “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach,” *Econometrica*, 59, 2347-370.

26. Parkinson, M. (1980), “The extreme value method for estimating the variance of the rate of return,” *Journal of Business*, 53, 61-65.

27. Poterba, J., and L. Summers (1986), “The persistence of volatility and stock market fluctuations,” *American Economic Review*, 76, 1142-1151.

28. Zakoian, J.M. (1994), ”Threshold Heteroskedastic Models,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-955.