財金論文叢刊
2014 年 6 月，第二十期，1-13

# 違約傳染效應對擔保債權憑證之評價與風險衡量

# Pricing and Risk Management of the Collateralized Debt Obligations with Default Contagion

鍾懿芳（Yi-Fang Chung）
德霖技術學院企管系助理教授

朱香蕙*（Hsiang-Hui Chu）
國立暨南國際大學財務金融系助理教授

高銘舜（Ming-Shun Kao）
國立暨南國際大學財務金融系碩士

## 摘要

本文探討違約傳染效應對即期與遠期生效擔保債權憑證的理論價格與風險衡量所造成之影響。以 Gregory and Laurent (2005)因子模型描述公司資產價值，並在違約事件條件獨立與傳染效應假設下，以 Hull and White (2004)提出之機率勺斗法則建構債權群組之損失分配，進而求算即期與遠期生效擔保債權憑證各分券之信用價差與期望損失(率)。研究結果發現考慮傳染效果因子後，即期或遠期生效擔保債權憑證各分券之信用價差及期望損失(率)皆提高，且隨著傳染效果因子愈強影響效果愈顯著。另外，投資人對未來市場的預期情況亦將影響傳染效應的影響程度，本研究結果顯示跨期相關因子愈低，隱含投資人對未來市場較樂觀，則傳染效應則愈顯著。

**關鍵詞：**即期生效擔保債權憑證、遠期生效擔保債權憑證、傳染效應、跨期相關因子、預期損失率

*通訊作者：暨南國際大學財務金融系，電子郵件信箱: hhchu@ncnu.edu.tw。

## Abstract

In this paper we investigate the valuation and risk measurement of spot- and forward-starting collateralized debt obligations (CDOs) under the default contagion effect. To obtain the credit spread and the expected loss (rate), the firm value is described by the factor model proposed by Gregory and Laurent (2005), and the reference pool loss distribution is constructed by the probability bucketing method of Hull and White (2004). No matter what the spot- and forward-starting CDOs, the tranche credit spread and the expected loss (rate) are consistently increasing when the contagion effect is considered. And the stronger the contagion effect is, the higher the tranche credit spread and the expected loss (rate) are. Moreover, the contagion effect degree is affected by the future market expectation of investors. The contagion effect is more remarkable with lower intertemporal correlation factor implied the investors' optimistic future market anticipation.


**keywords：** Spot-Starting CDO；Forward-Starting CDO；Contagion Effect；Intertemporal Correlation Factor；Expected Loss Rate

## 壹、緒論

隨著證券化市場的快速發展，證券化商品結構也愈趨於複雜，擔保債權憑證是藉由特殊目的機構依照不同的風險等級經過切割與包裝後，透過權益分券、次償分券與先償分券之發行並將風險移轉給投資人，而特殊目的機構再將分券發行所得到資金購買公債等擔保品作爲日後還本付息的保證。當擔保債權憑證標的資產發生違約時，權益分券將優先承擔違約損失，直到權益分券本金耗盡，再接續由次償分券、先償分券承擔違約損失。即期(遠期)生效擔保債權憑證基本結構與一般的擔保債權憑證相同，主要差別在於即期(遠期)生效擔保債權憑證在不發生實質資產移轉的情況下，以簽訂一個信用違約交換契約的形式交易而非實際移轉債權，並達到信用風險移轉之目的。

文獻上已有許多關於評價即期生效擔保債權的研究。Li(2000)以 Guassian copula 建構邊際違約時點之相關性結構，定義違約時點爲資產存活直到違約之時間長度，並結合債權群組中各資產之名目本金、回復率、違約機率與違約相關性等參數應用於信用衍生性商品之評價。其後，爲解決當債權群組中資產數目過多蒙地卡羅法模擬各資產之違約時點非常耗時之問題，因子模型相關研究因而誕生，相關文獻包括 Gregory and Laurent (2005)提出半解析式模型，在條件獨立假設下利用條件違約機率得到債權群組之條件損失分配函數，進而得出非條件的損失分配函數。Andersen and Sidenius (2004)在因子關聯結構下，使用遞迴法一次考慮一個資產之違約情形，直到所有資產皆被考慮爲止，並求算債權群組之損失分配。Hull and White(2004)則提出機率勺斗法則，其求算債權群組之損失分配比遞迴法更具效率。

有鑒於分別發生於 1997 年及 2008 年之亞洲金融風暴與次級房貸風暴所引發之全球金融海嘯，造成許多跨國企業巨大損失甚至倒閉，一連串的金融危機效應，無論是金融

機構或投資人皆承受巨大的損失，但也使得金融市場開始正視信用風險管理的重要性。

信用風險評價模型主要分爲結構式模型與縮減式模型。結構式模型由 Merton (1974)提出，定義違約事件爲公司資產價值低於公司負債價值，將公司整體的資本結構視爲一個買權，所有流通在外的有價證券視爲對公司資產的請求權，亦即視爲標的資產，而負債總額則爲履約價格，再以 Black-Scholes 選擇權評價模型評估債券違約風險。不過，此模型假設資產價值必須爲對數常態之隨機過程分配並限制違約只發生在債券到期時，另外，資產與負債價值也存在不容易取得等問題。Black and Cox (1976)提出了首次通過時間模型設定債券到期前的邊際條件爲違約門檻，當債券到期前公司資產價值接觸到該門檻時，則引發違約。Zhou(2001)以首次通過時間模型爲基礎，提出多個企業間的違約相關性模型，定義當企業價值第一次碰觸到違約門檻時即爲違約，並進一步求得兩企業之聯合機率相當於計算二維度資產隨機過程通過違約門檻的機率。

Jarrow and Turnbull (1995)提出縮減式模型，利用市場資訊求得違約機率，假設違約事件服從 Poisson 分配，而違約事件之發生是取決於外生變數，包括使用具風險性之分券價格或信用價差來反推求得違約機率或回復率，並進而評估信用風險。此外，此研究提出違約基礎法對信用衍生性商品進行評價與避險，模型中給定一外生之常數回復率，利用市場上具有信用風險之債券價格與無風險債券價格推算違約機率，並進一步評價其他具有相同評等之債券。Jarrow, Lando and Turnbull (1997)提出以公司信用評等之發展過程來決定風險中立下之移動機率，並對具風險性債券進行評價，稱之爲信用評等移轉法，此研究認爲除了違約，信用評等之改變也是影響信用價差之重要因素。

再者，愈來愈多的理論或實務研究結果也發現金融危機的連鎖傳染效應不容忽視。Davis and Lo (2001)首先於信用衍生性商品評價中考慮傳染效應因素，假設投資組合中公司的違約事件會引起其他公司亦發生違約事件。Rösch and Winterfeldt (2008)將其延伸，提出在單因子模型下之信用傳染模型，模型中之因子均服從標準常態，每一種產業中的公司皆區分爲傳染公司或被傳染公司，此模型參數不但可以由歷史資料進行估計，且可應用於不同規模的投資組合。陳欣怡(2007)應用 Rösch and Winterfeldt (2008)信用傳染模型於合成型擔保債權憑證之評價，將所有的資產分爲傳染公司以及被傳染公司，並不特別區分產業別，使得模型應用更具可解析性及實用性。但是，傳染效果對遠期生效擔保債權憑證評價的影響程度尚無相關之研究。因此，本研究目的爲分析傳染效應對遠期生效擔保債權憑證之評價與風險衡量的影響程度，並將之與即期生效擔保債權憑證進行比較。

本文的架構安排如下：第 2 節爲模型設定、損失分配函數之求算、擔保債權憑證之評價及風險衡量指標的介紹。第 3 節爲模擬結果與分析。最後爲本文之結論。

## 貳、方法

### 一、模型設定

本研究假設 N 個具違約相關性之標的資產，其中，共 I 家傳染公司，C 家被傳染公司，且 I＋C＝N。傳染公司發生違約時，僅會傳染給被傳染公司，傳染公司彼此之間不具有傳染力；被傳染公司可能直接違約或因傳染公司違約而間接違約，但被傳染公司彼

此之間亦不具有傳染力，亦不會再傳染給傳染公司。假設各資產標的之違約強度爲常數，$\lambda_j$，違約事件服從 Poisson 分配，式(1)爲信用違約交換價差之市場報價，*CDS spread*，所反推得到之標的違約強度：

$$\lambda_j = \frac{CDS\ spread}{1-R} \tag{1}$$

其中，$R$ 爲回復率、$\lambda_j$ 爲資產 $j$ 之違約強度。

各時點 t 下，假設隨機變數 $t_j$ 爲第 j 個資產之違約時點，第 $j$ 個資產之風險中立違約機率 $Q_j(t)$ 爲

$$Q_j(t) = Q\ (t_j \le t) = 1 - e^{-\lambda_j t} \tag{2}$$

(一)傳染公司之高斯關聯結構

假設傳染公司資產價值之隨機變數 $x_j^I$ 爲

$$x_j^I = \sqrt{a_j^I}M + \sqrt{1-a_j^I}Z_j^I, \quad j = 1,\ldots,I \tag{3}$$

其中，$M$ 爲系統性風險因子，$Z_j^I$ 爲 $x_j^I$ 之非系統性風險因子，並與 $M$ 獨立，$a_j^I$ 爲傳染公司間之相關係數 $(-1 \le a_j^I \le 1)$。在 Gaussian copula 下，假設系統性風險因子 $M$ 與 $Z_j^I$ 皆服從標準常態分配。假設公司資產低於某一門檻值 $x^I$ 時( $x_j^I \le x^I$ )，公司即違約，則標的資產 $j$ 的違約機率 $Q_j^I(t)$ 爲

$$Q_j^I(t) = Q^I(t_j \le t) = F(x_j^I \le x^I) = F_j(x^I) \tag{4}$$

$$\Rightarrow x^I = F_j^{-1}\left[Q_j^I(t_j \le t)\right] \tag{5}$$

$$\Rightarrow Q_j^I(t \mid M) = Q^I(t_j \le t \mid M) = \Phi\left[\frac{x_j^I - \sqrt{a_j^I}M}{\sqrt{1-a_j^I}}\right] \tag{6}$$

其中，$\Phi$ 爲 $Z_j^I$ 之累積機率密度函數。

在條件獨立之假設下，傳染公司之條件聯合違約機率分配即爲各資產之條件違約機率分配之乘積，表示如下：

$$Q^I(t \mid M) = \prod_{j=1}^{I} Q_j^I(t \mid M) \tag{7}$$

(二)被傳染公司之高斯關聯結構

假設被傳染公司資產價值之隨機變數 $x_j^C$ 爲

$$x_j^C = \sqrt{a_j^C}M + \sqrt{1-a_j^C}Z_j^C + \beta \cdot \frac{D^I}{I}, \quad j = 1,\ldots,C \tag{8}$$

其中，$M$ 爲系統性風險因子，$Z_j^C$ 爲 $x_j^C$ 之非系統性風險因子並與 $M$ 獨立，$a_j^C\left(-1 \le a_j^C \le 1\right)$ 爲被傳染公司資產間之相關係數。被傳染公司發生違約之情況可能爲直接違約或者是因爲傳染公司違約而發生間接違約，亦即 $x_j^C$ 除了受系統風險因子與非系統風險因子影響外，亦會受傳染公司違約強度影響。假設 $\beta$ 爲傳染因子係數(β<0)，當 $\beta$ 爲 0 時則不存在傳染效果，$D^I$ 爲傳染公司違約家數，$I$ 爲傳染公司總家數，傳染效果定義爲傳染因子係數乘上一傳染公司違約比率，$D^I/I$。各資產 $j$ 的條件違約機率可表示爲

$$Q_j^C(t \mid M) = Q^C\left(t_j \le t \mid M\right) = \Phi\left[\frac{x^C - \sqrt{a_j^C}M - \beta \cdot \frac{D^I}{I}}{\sqrt{1-a_j^C}}\right] \tag{9}$$

其中 $\Phi$ 爲 $Z_j^C$ 之累積機率密度函數。

在條件獨立之假設下，被傳染公司之條件聯合違約機率分配即爲各資產之條件違約機率分配之乘積，表示如下：

$$Q^C(t \mid M) = \prod_{j=1}^{C} Q_j^C(t \mid M) \tag{10}$$

透過式(6)與式(11)可得到債權群組之條件聯合機率分配，即爲各資產之條件違約機率分配乘積：

$$Q(t \mid M) = Q^I(t \mid M) \cdot Q^C(t \mid M) \tag{11}$$

$$\Rightarrow Q(t) = \int_M Q^I(t \mid M) \cdot Q^C(t \mid M)dM \tag{12}$$

(三)傳染公司之跨期相關高斯關聯結構模型

Andersen (2006) 在單因子關聯結構模型中加入跨期相關因子 $\rho_M$ 與 $\rho_Z$，假設資產價值會在不同時點，$T_1$ 與 $T_2$，有不同之資產價值隨機過程：

$$\begin{aligned} x_j^I(T_1) &= \sqrt{a_j^I(T_1)}M(T_1) + \sqrt{1-a_j^I(T_1)}Z_j^I(T_1) \\ x_j^I(T_2) &= \sqrt{a_j^I(T_2)}M(T_2) + \sqrt{1-a_j^I(T_2)}Z_j^I(T_2) \end{aligned}, \quad j = 1,2,\ldots,I \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\tau_j^I > t\right) = \Pr\left(\sqrt{a_j^I(T_1)}M(T_1) + \sqrt{1-a_j^I(T_1)}Z_j^I(T_1) > H_j^I(t)\right), t \in [0,T_1] \\ \Rightarrow\ &\Pr\left(T_1 < \tau_j^I \le t\right) = \Pr\begin{pmatrix} \sqrt{a_j^I(T_1)}M(T_1) + \sqrt{1-a_j^I(T_1)}Z_j^I(T_1) > H_j^I(T_1) \\ , \sqrt{a_j^I(T_2)}M(T_2) + \sqrt{1-a_j^I(T_2)}Z_j^I(T_2) \le H_j^I(t) \end{pmatrix}, t \in (T_1,T_2] \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $H_j^I(t)$ 爲違約門檻變數，假設 $H_j^I(t) = F_j^{-1}\left[Q_j^I(t)\right]$

在遠期生效擔保債權憑證中，投資人所要關心的是契約生效日之後的收支，亦即我們需要的是 $[T_1,t]$ 期間所發生之違約機率 $\Pr\left(T_1 < \tau_j^I \le t\right)$，而 $\Pr\left(T_1 < \tau_j^I \le t\right)$ 又可以 $q_j^I(T_1,m_1,m_2) - q_j^I(t,m_1,m_2)$ 表示。其中 $q_j^I(t,m_1,m_2)$ 爲傳染公司資產在

$M=\left(M^{(1)},M^{(2)}\right)=\left(m_1,m_2\right)$下之條件存活機率，此外生效日起算之條件違約機率又可用 $\Pr\left(Z_j^I(T_1)>x,Z_j^I(T_2)\le y\right)+\Pr\left(Z_j^I(T_1)\le x,Z_j^I(T_2)\le y\right)=\Pr\left(Z_j^I(T_2)\le y\right)$來做替換，則

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\begin{array}{l}\sqrt{a_j^I(T_1)}M(T_1)+\sqrt{1-a_j^I(T_1)}Z_j^I(T_1)>H_j^I(T_1),\\ \sqrt{a_j^I(T_2)}M(T_2)+\sqrt{1-a_j^I(T_2)}Z_j^I(T_2)\le H_j^I(t)\end{array}\right)\\
&=F_j^I(T_2)\left(\frac{H_j^I(t)-\sqrt{a_j^I(T_2)}m_2}{\sqrt{1-a_j^I(T_2)}}\right)\\
&-F_j^I(T_1,T_2)\left(\frac{H_j^I(T_1)-\sqrt{a_j^I(T_1)}m_1}{\sqrt{1-a_j^I(T_1)}},\frac{H_j^I(t)-\sqrt{a_j^I(T_2)}m_2}{\sqrt{1-a_j^I(T_2)}}\right)
\end{aligned}\tag{15}$$

$$q_j^I(t,m_1,m_2)=1-\Phi_j^I(T_1)\left(\frac{H_j^I(t)-\sqrt{a_j^I(T_1)}m_1}{\sqrt{1-a_j^I(T_1)}}\right),t\in[0,T_1]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ q_j^I(t,m_1,m_2)&=q(T_1,m_1,m_2)-\Phi_j^I(T_2)\left(\frac{H_j^I(t)-\sqrt{a_j^I(T_2)}m_2}{\sqrt{1-a_j^I(T_2)}}\right)\\
&+\Phi_j^I(T_1,T_2)\left(\frac{H_j^I(T_1)-\sqrt{a_j^I(T_1)}m_1}{\sqrt{1-a_j^I(T_1)}},\frac{H_j^I(t)-\sqrt{a_j^I(T_2)}m_2}{\sqrt{1-a_j^I(T_2)}};\rho_Z^I\right),t\in(T_1,T_2]
\end{aligned}\tag{16}$$

債權群組之非條件違約機率則爲$\Pr\left(\tau_j^I>t\right)=\int_M q_j^I(t,m_1,m_2)\Phi_M^I(T_1,T_2)(m_1,m_2)dm_1dm_2$ 。

(四)被傳染公司之跨期相關高斯關聯結構模型

接著，在跨期相關因子之單因子模型中納入傳染效果，假設資產價值會在不同時點，$T_1$與$T_2$ ，有不同之資產價值隨機過程：：

$$\begin{aligned}
x_j^C(T_1)&=\sqrt{a_j^C(T_1)}M(T_1)+\sqrt{1-a_j^C(T_1)}Z_j^C(T_1)+\beta_1\cdot\frac{D^I}{I}\\
x_j^C(T_2)&=\sqrt{a_j^C(T_2)}M(T_2)+\sqrt{1-a_j^C(T_2)}Z_j^C(T_2)+\beta_2\cdot\frac{D^I}{I}
\end{aligned},\quad j=1,2,\ldots,C\tag{17}$$

$$\Pr\left(\tau_j^C>t\right)=\Pr\left(\sqrt{a_j^C(T_1)}M(T_1)+\sqrt{1-a_j^C(T_1)}Z_j^C(T_1)+\beta_1\cdot\frac{D^I}{I}>H_j^C(t)\right),t\in[0,T_1]$$

$$\Rightarrow\ \Pr\left(T_1<\tau_j^C\le t\right)=\Pr\left(\begin{array}{l}\sqrt{a_j^C(T_1)}M(T_1)+\sqrt{1-a_j^C(T_1)}Z_j^C(T_1)+\beta_1\cdot\frac{D^I}{I}>H_j^C(T_1)\\ ,\sqrt{a_j^C(T_2)}M(T_2)+\sqrt{1-a_j^C(T_2)}Z_j^C(T_2)+\beta_2\cdot\frac{D^I}{I}\le H_j^C(t)\end{array}\right),t\in(T_1,T_2]\tag{18}$$

因此，可得兩期之條件存活機率爲

$$
\begin{aligned}
& q_j^C(t,m_1,m_2) \\
& = q_j^C(T_1,m_1,m_2) - \Phi_j^C(T_2)\left(\frac{H_j^C(t)-\sqrt{a_j^C(T_2)}m_2-\beta_2\cdot\frac{D^I}{I}}{\sqrt{1-a_j^C(T_2)}}\right) \\
& + \Phi_j^C(T_1,T_2)\left(\frac{H_j^C(T_1)-\sqrt{a_j^C(T_1)}m_1-\beta_1\cdot\frac{D^I}{I}}{\sqrt{1-a_j^C(T_1)}},\frac{H_j^C(t)-\sqrt{a_j^C(T_2)}m_2-\beta_2\cdot\frac{D^I}{I}}{\sqrt{1-a_j^C(T_2)}};\rho_Z^C\right), t\in(T_1,T_2]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

## 二、損失分配函數之求算

本研究採用機率勺斗法則建構標的資產組合之條件損失分配函數，假設有 $N$ 個標的資產，K+1 個可能損失範圍，其中，第 0 個損失區間之損失介於 $[0,b_0)$，第一個損失區間的損失介於 $[b_0,b_1)$，以此類推，第 $k$ 個損失區間之損失介於 $[b_{k-1},b_k)$，令 $b_0$ 爲 0，則第 0 個損失區間表示爲零損失的情況。在條件獨立的假設下，違約事件彼此獨立，因此可依序考慮每個資產加入債權群組之損失情況，以條件違約機率，更新各損失區間之機率值和區間內之條件預期損失金額。假設標的資產組合中一開始沒有任何資產，此時損失介於第 0 個損失區間的機率爲 1，當加入第一個資產到標的資產組合中，損失有可能會發生，那麼條件違約機率便會有部份機率由零損失區間移到其他損失大於 0 的區間，同時更新第 $k$ 個區間內的條件預期損失；再來考慮第二個資產加入標的資產組合中，要先判斷第二個資產違約後，第 $k$ 個區間原先的條件預期損失加上第二個資產違約的金額會不會流入其他區間，若是，則依照第二個資產的條件違約機率大小，將部份機率由第 $k$ 個區間移動到某個新區間 $u(k)$，並更新該區間的條件預期損失 $A_{u(k)}$；若不是，則只需更新第 $k$ 個區間的條件預期損失 $A_k$ 即可。依序考慮第三個、第四個資產直到第 N 個資產加入標的資產組合的違約情形，即可建構出標的資產組合的損失分配函數。

(一)當 $u(k)=k$ 時，則 $A_k+L_j$ 仍在原先的區間時，則

$$
\begin{aligned}
P_{u(k)} &= P_k^* \\
A_{u(k)} &= A_k^* + L_j
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中，$P_k^*$ 爲違約損失發生前的機率，$P_{u(k)}$ 爲違約損失發生後的機率；$A_{u(k)}$ 爲新區間的預期損失，$A_k$ 爲原區間的預期損失。

(二)當 $u(k)>k$ 時，則 $A_k+L_j$ 會移動到另一個區間時，則

$$
\begin{aligned}
P_k &= P_k^*(1-Q_i(t\mid M)) \\
P_{u(k)} &= P_{u(k)}^* + P_k^* Q_i(t\mid M) \\
A_k &= A_k^* \\
A_{u(k)} &= \frac{P_{u(k)}^* A_{u(k)}^* + P_k^* Q_i(t\mid M)(A_i^*+L_i)}{P_{u(k)}^* + P_k^* Q_i(t\mid M)}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

其中，$Q_i(t\mid M)$ 爲 $t$ 時點第 $i$ 個資產的條件違約機率。

最後，本研究中以 Gauss-Hermite 數值積分法求得非條件的違約機率。

## 三、擔保債權憑證之評價

透過溢酬收入與違約支出之現值，並令分券之期初價值為 0 即可得擔保債權憑證之合理信用價差，假設持有擔保債權憑證之分券的投資人在 $t_i$ 時點之損失 $L_{t_i}^j$ 如下：

$$L_{t_i}^j = \begin{cases} 0 & ,if\ L_{t_i}^j \le C^j \\ A_{t_i}^j - C^j & ,if\ C^j < L_{t_i}^j < D^j \\ D^j - C^j & ,if\ L_{t_i}^j \ge D^j \end{cases} \tag{22}$$

其中，$A_{t_i}^j$ 為分券 $j$ 在 $t_i$ 時點下之累積總損失，$C$ 為分券之損失起賠點，$D$ 為分券之損失止賠點。

(一)分券期望損失之計算：

$$EL_{t_i}^j = \sum_{k=0}^{K} P_{t_i}^j(k) \max\left(\min\left(A_{t_i}^j(k), D^j\right) - C^j, 0\right) \tag{24}$$

其中，$P_{t_i}^j(k)$ 為分券 $j$ 在時點 $t_i$ 下之標的資產組合違約損失落入第 $k$ 個區間之機率，$A_{t_i}^j(k)$ 為分券 $j$ 在時點 $t_i$ 第 $k$ 個區間之平均損失。

(二)分券之溢酬收入(PL)：

擔保債權憑證分券之持有人，即出售保護的賣方於各付息日依照存活本金的大小領取溢酬，假設 $\Delta_{t_{i-1},t_i}$ 為付息日之間隔，$B(t_i)$ 為折現因子，分券之溢酬收入現值如下：

$$PL^j = s^j \times \sum_{i=1}^{T} \Delta_{t_{i-1},t_i} B(t_i)\left[\left(D^j - C^j\right) - EL_{t_i}^j\right] \tag{25}$$

(三)分券之違約支出(DL)：

違約支出是指保護賣方在違約事件發生時，支付予保護買方之賠償金現值:

$$DL^j = \sum_{i=1}^{T} B(t_i)\left[EL_{t_i}^j - EL_{t_i-1}^j\right] \tag{26}$$

(四)求出各分券 $j$ 之溢酬收入與違約支出之現值後，令收入與支出之現值相等，即可求得各分券 $j$ 之合理信用價差 $s^j$ 為

$$s^j = \frac{\sum_{i=1}^{T} B(t_i)\left[EL_{t_i}^j - EL_{t_i-1}^j\right]}{\sum_{i=1}^{T} \Delta_{t_i-1,t_i} B(t_i)\left[\left(D^j - C^j\right) - EL_{t_i}^j\right]} \tag{27}$$

## 四、擔保債權憑證之風險衡量指標

本研究定義擔保債權憑證之風險衡量指標為期望損失率，即分券期望損失金額佔名目本金之比例：

$$\frac{EL_{t_i}^j}{D^j - C^j}, \quad j = 1, \ldots N \tag{28}$$

# 參、結果

本研究假設市場上有一即期生效擔保債權憑證與一遠期生效擔保債權憑證(FCDO)，契約期間皆爲五年，FCDO 生效期爲兩年，故 FCDO 於第七年到期，債權群組皆由 110 個信用違約交換組成，每一個信用違約交換之名目本金爲一百萬美元，所以債權群組之總名目本金爲一千一百萬元。分券形式爲權益分券（承擔 0%~3%之債權群組損失）、次償分券甲券（承擔 3%~7%之債權群組損失）、次償分券乙券（承擔 7%~11%之債權群組損失）、次償分券丙券（承擔 11%~16.5%之債權群組損失）與先償分券（承擔 16.5%~33%之債權群組損失）。此外，假設契約期間無風險利率爲 5%，回復率爲 40%，資產間相關係數爲 0.3，風險因子承載係數爲 $\sqrt{0.3}$ ，違約強度爲 0.01。

## 一、即期生效擔保債權憑證之評價

表 1 爲即期生效擔保債權憑證各分券之信用價差，考慮傳染效果(β<0)之信用價差皆比未考慮傳染效果(β=0)爲高，且各分券隨著傳染效果強度愈高，信用價差愈高。

表 1　即期生效擔保債權憑證之信用價差

| | 債權群組 | 權益分券 | 次償甲券 | 次償乙券 | 次償丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta = 0$ | 60 | 1509 | 417 | 174 | 82 | 15 |
| $\beta = -1$ | 73 | 1838 | 547 | 239 | 122 | 24 |
| $\beta = -2$ | 90 | 2231 | 702 | 340 | 164 | 39 |
| $\beta = -3$ | 109 | 2701 | 894 | 459 | 224 | 61 |

## 二、即期生效擔保債權憑證之風險衡量

表 2 爲即期生效擔保債權憑證各分券之期望損失，當傳染效果增強則無論債權群組亦或各分券之期望損失皆愈高。由於期望損失爲一絕對金額，無法用來衡量各分券之相對風險，因此本研究以期望損失率，即期望損失佔本金之比例來衡量不同分券間之風險暴露程度，研究結果顯示於表 3。爲分析傳染效果對期望損失率的影響程度，本研究求算傳染效果下之期望損失率相對於無傳染效果之期望損失率的倍數關係，並將之顯示於括弧內。研究結果顯示當未考慮傳染效果時，權益分券與次償分券之期望損失率分別爲 51.06%、19.38%、25.85%與 15.51%，皆比債權群組的 2.93%高，符合高風險高報酬性質，而先償分券之期望損失率爲 0.80%，小於債權群組之期望損失率，亦符合先償分券之信用增強較大，風險相對小於債權群組，故期望損失率較小之特性。

隨著考慮傳染效果增強，權益分券之期望損失率由 51.06%提高 1.123、1.242 與 1.354 倍，分別爲 57.34%、63.43%與 69.16%，也就是說傳染效果強度愈強時，權益分券之期望損失率增加之速度亦會增加，其他分券亦有相同結果。在固定的傳染強度下，各分券之變化幅度不盡相同，以傳染係數 $\beta = -3$ 爲例，期望損失率變化幅度最大的是先償分券(期望損失率爲無傳染效果時之 3.900 倍)，其次爲次償分券(約 1.874~1.875 倍)，變化幅度最小的則是權益分券(1.354 倍)。由於先償分券承擔損失的順位在權益分券與次償分券

之後，當傳染效果愈強表示標的資產連鎖違約之機率大幅提高，使得先償分券承擔損失的機率顯著提升，因此傳染效果的因素對先償分券的評價有較大的影響。

表 2　即期生效擔保債權憑證之期望損失

| | 債權群組 | 權益分券 | 次償甲券 | 次償乙券 | 次償丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta = 0$ | 3.219 | 1.685 | 0.853 | 0.284 | 0.233 | 0.131 |
| $\beta = -1$ | 3.944 | 1.892 | 1.079 | 0.384 | 0.342 | 0.208 |
| $\beta = -2$ | 4.791 | 2.093 | 1.324 | 0.536 | 0.449 | 0.338 |
| $\beta = -3$ | 5.770 | 2.282 | 1.599 | 0.700 | 0.602 | 0.515 |

表 3　即期生效擔保債權憑證之期望損失率(%)

| | 債權群組 | 權益分券 | 次償甲券 | 次償乙券 | 次償丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta = 0$ | 2.93 | 51.06 | 19.38 | 25.85 | 15.51 | 0.80 |
| $\beta = -1$ | 3.59 | 57.34 | 24.51 | 32.69 | 19.61 | 1.26 |
| | （1.225） | （1.123） | （1.265） | （1.265） | （1.264） | （1.575） |
| $\beta = -2$ | 4.36 | 63.43 | 30.09 | 40.12 | 24.07 | 2.05 |
| | （1.488） | （1.242） | （1.553） | （1.552） | （1.552） | （2.563） |
| $\beta = -3$ | 5.25 | 69.16 | 36.34 | 48.45 | 29.07 | 3.12 |
| | （1.792） | （1.354） | （1.875） | （1.874） | （1.874） | （3.900） |

## 三、遠期生效擔保債權憑證之評價

表 4 與表 5 分別爲不同跨期相關因子假設下( $r = 1$ 與 $r = -1$ )之兩年期生效擔保債權憑證債權群組及各分券之信用價差。根據研究結果顯示，信用增強愈強之分券，其信用價差愈小，而傳染效果因素使得債券群組及所有分券之信用價差皆隨之變大，且傳染強度愈強，債權群組及各分券之信用價差亦愈高。另外，相同的傳染強度下，跨期相關因子等於-1 時之各分券信用價差皆大於跨期相關因子等於 1 時之各分券信用價差。

表 4　兩年期生效擔保債權憑證之信用價差 $(r = 1)$（單位：BPS）

| $(\beta_1, \beta_2)$ | 債權群組 | 權益分券 | 次償分券甲券 | 次償分券乙券 | 次償分券丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 55 | 1683 | 396 | 122 | 29 | 0.15 |
| (0,-1) | 73 | 2286 | 601 | 225 | 74 | 3.16 |
| (0,-2) | 95 | 3057 | 857 | 369 | 144 | 12.00 |
| (0,-3) | 120 | 4041 | 1181 | 542 | 245 | 32.00 |

表 5　兩年期生效擔保債權憑證之信用價差$(r=-1)$（單位：BPS）

| $(\beta_1,\beta_2)$ | 債權群組 | 權益分券 | 次償分券甲券 | 次償分券乙券 | 次償分券丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 86 | 2460 | 693 | 314 | 154 | 34 |
| (0,-1) | 105 | 3059 | 895 | 439 | 207 | 54 |
| (0,-2) | 127 | 3816 | 1155 | 573 | 294 | 79 |
| (0,-3) | 153 | 4788 | 1482 | 734 | 416 | 111 |

## 四、遠期生效擔保債權憑證之風險衡量

表 6 與表 7 分別爲不同跨期相關因子假設下($r=1$與$r=-1$)之兩年期生效擔保債權憑證之期望損失，各分券之期望損失皆隨著傳染效果增強而變大，且此結果並不受跨期相關因子所影響。另外，相同的傳染強度下，跨期相關因子等於-1 時之各分券信用價差皆大於跨期相關因子等於 1 時之各分券信用價差，以權益分券且未考慮傳染效果爲例，當跨期相關因子分別爲 1 與-1 時，期望損失分別爲 1.827 與 2.020。

本研究以期望損失率衡量債權群組及各分券之相對風險，表 8 與表 9 分別爲不同跨期相關因子假設下($r=1$與$r=-1$)之兩年期生效擔保債權憑證之期望損失率，債權群組及各分券之期望損失率皆隨著傳染效果增強而提高，且在固定之傳染效果因子下，跨期相關因子等於-1 時之各分券信用價差皆大於跨期相關因子等於 1 時之各分券信用價差。值得注意的是，當跨期相關因子爲 1 時，傳染效果所造成之乘數影響反而大於跨期相關因子爲-1 時，以權益分券爲例，當$r=1$且$\beta_2=-3$時，其期望損失率爲未考慮傳染效果時之 1.375 倍；而當$r=-1$且$\beta_2=-3$時，其期望損失率僅爲未考慮傳染效果時之 1.270 倍。此結果可能是因爲當投資人對未來市場預期看多時，由於投資人對市場存有較樂觀之心態，一但考慮傳染效果，則標的資產發生連鎖違約機率因而大幅提升，因而導致於傳染效果所造成之乘數影響較爲強烈，也就是說，相對於空頭市場，多頭市場時發生群體違約事件的絕對損失較小，但是相對損失卻是較大的。

表 6　兩年期生效擔保債權憑證之期望損失$(r=1)$

| $(\beta_1,\beta_2)$ | 債權群組 | 權益分券 | 次償分券甲券 | 次償分券乙券 | 次償分券丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 2.994 | 1.827 | 0.841 | 0.212 | 0.085 | 0.002 |
| (0,-1) | 3.923 | 2.087 | 1.186 | 0.374 | 0.217 | 0.029 |
| (0,-2) | 4.991 | 2.314 | 1.544 | 0.583 | 0.408 | 0.109 |
| (0,-3) | 6.207 | 2.513 | 1.912 | 0.803 | 0.668 | 0.277 |

表 7　兩年期生效擔保債權憑證之期望損失$(r=-1)$

| $(\beta_1,\beta_2)$ | 債權群組 | 權益分券 | 次償分券甲券 | 次償分券乙券 | 次償分券丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 4.454 | 2.020 | 1.231 | 0.475 | 0.408 | 0.283 |
| (0,-1) | 5.380 | 2.214 | 1.493 | 0.641 | 0.536 | 0.446 |
| (0,-2) | 6.445 | 2.396 | 1.789 | 0.795 | 0.746 | 0.642 |
| (0,-3) | 7.658 | 2.564 | 2.099 | 0.961 | 1.020 | 0.895 |

表 8　兩年期生效擔保債權憑證之期望損失率$(r=1)$(%)

| $(\beta_1,\beta_2)$ | 債權群組 | 權益分券 | 次償分券甲券 | 次償分券乙券 | 次償分券丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 2.72 | 55.38 | 19.10 | 25.47 | 15.28 | 0.01 |
| (0,-1) | 3.57 | 63.25 | 26.94 | 35.93 | 21.56 | 0.17 |
| | (1.313) | (1.142) | (1.410) | (1.411) | (1.411) | (17) |
| (0,-2) | 4.54 | 70.13 | 35.10 | 46.79 | 28.08 | 0.66 |
| | (1.669) | (1.266) | (1.838) | (1.837) | (1.838) | (66) |
| (0,-3) | 5.64 | 76.14 | 43.45 | 57.93 | 34.76 | 1.68 |
| | (2.074) | (1.375) | (2.275) | (2.274) | (2.275) | (168) |

表 9　兩年期生效擔保債權憑證之期望損失率$(r=-1)$(%)

| $(\beta_1,\beta_2)$ | 債權群組 | 權益分券 | 次償分券甲券 | 次償分券乙券 | 次償分券丙券 | 先償分券 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 4.05 | 61.22 | 27.97 | 37.29 | 22.37 | 1.72 |
| (0,-1) | 4.89 | 67.08 | 33.94 | 45.25 | 27.15 | 2.70 |
| | (1.207) | (1.096) | (1.213) | (1.213) | (1.214) | (1.570) |
| (0,-2) | 5.86 | 72.59 | 40.65 | 54.20 | 32.52 | 3.89 |
| | (1.447) | (1.186) | (1.453) | (1.453) | (1.454) | (2.262) |
| (0,-3) | 6.96 | 77.72 | 47.69 | 63.59 | 38.15 | 5.42 |
| | (1.719) | (1.270) | (1.705) | (1.705) | (1.705) | (3.151) |

## 肆、 討論

本研究目的爲分析傳染效應對即期(遠期)生效擔保債權憑證之評價與風險衡量的影響程度。本文在條件獨立之假設下以 Hull and White (2004)之機率勺斗法則建構債權群組之損失分配，並評價即期(遠期)生效擔保債權憑證，最後，則以期望損失及期望損失率進行風險衡量及分析。

研究結果發現，考慮傳染效果之即期生效擔保債權憑證信用價差皆比未考慮傳染效果爲高，且各分券隨著傳染效果強度愈高，信用價差愈高；當傳染效果增強則無論債權群組亦或各分券之期望損失皆愈高。當未考慮傳染效果時，權益分券與次償分券之期望損失率皆比債權群組高，符合高風險高報酬性質，而先償分券之期望損失率小於債權群組之期望損失率，亦符合先償分券之信用增強較大，風險相對小於債權群組，故期望損失率較小之特性。隨著考慮傳染效果增強，權益分券之期望損失率增加之速度亦會增加，其他分券亦有相同結果；而在固定的傳染強度下，期望損失率變化幅度最大的是先償分券，其次爲次償分券，變化幅度最小的則是權益分券。由於先償分券承擔損失的順位在權益分券與次償分券之後，當傳染效果愈強表示標的資產連鎖違約之機率大幅提高，使得先償分券承擔損失的機率顯著提升，因此傳染效果的因素對先償分券的評價有較大的影響。

傳染效果對遠期生效擔保債權憑證之評價與風險衡量所造成之影響大部分與即期生效擔保債權憑證之研究結果一致。不過，在相同的傳染強度下，跨期相關因子等於-1時之各分券信用價差皆大於跨期相關因子等於 1 時之各分券信用價差，而各分券之期望損失皆隨著傳染效果增強而變大，且此結果並不受跨期相關因子所影響。值得注意的是，當跨期相關因子爲 1 時，傳染效果所造成之乘數影響反而大於跨期相關因子爲-1 時，此結果可能是因爲當投資人對未來市場預期看多時，由於投資人對市場存有較樂觀之心態，一但考慮傳染效果，則標的資產發生連鎖違約機率因而大幅提升，因而導致於傳染效果所造成之乘數影響較爲強烈，也就是說，相對於空頭市場，多頭市場時發生群體違約事件的絕對損失較小，但是相對損失卻是較大的。

## 參考文獻


陳欣怡 (2007)。考慮違約傳染效應下合成型擔保債權憑證之評價與避險(未出版之碩士論文)。國立政治大學，臺北市。

Andersen, L., (2006). Portfolio losses in factor models: term structures and intertemporal loss dependence. Working Paper, Bank of America.

Andersen, L., & Sidenius, J., (2004). Extensions to the Gaussian copula: random recovery and random factor loadings. *Journal of Credit Risk*, 1(1), 29-70.

Black, F., & Cox, J. C., (1976). Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance*, 31(2), 351-367.

Davis, M., & Lo, V., (2001). Infectious defaults. *Quantitative Finance*, 1(4), 382-387.

Rösch, D., & Winterfeldt, B. (2008). Estimating credit contagion in a standard factor model. Risk 21(8), 78–82.

Gregory, J., & Laurent, J. P., (2005). Basket default swaps, CDOs and factor copulas. *Journal of Risk,* 7(4), 103-122.

Hull, J. & White, A., (2004). Valuation of a CDO and nth to default CDS without Monte Carlo simulation. *Journal of Derivatives*, 12(2), 8-48.

Jarrow, R., Lando, D., & Turnbull, S., (1997). A Markov model for the term structure of credit spread. *Review of Financial Studies* 10(2), 481- 523.

Jarrow, R., & Turnbull, S., (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, 50(1), 53-85.

Li, D.X., (2000). On default correlation: a copula function approach. *Journal of Fixed Income* 9(4), 43-54.

Merton, R., (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29(2), 449-470.

Zhou, C., (2001). An analysis of default correlations and multiple defaults. *Review of Financial Studies*, 14(2), 555-576.