財金論文叢刊
2008 年 6 月，第八期，50-61

QUANTO EIA 的評價：蒙地卡羅法
MONTE CARLO METHOD FOR VALUATION OF QUANTO RATCHET EQUITY INDEXED ANNUITIES

陳冠妤
國立政治大學 資訊管理研究所 研究生
謝明華
國立政治大學 資訊管理系 副教授
蔡瑞煌
國立政治大學 資訊管理系 教授

Abstract

This paper introduces three major different types of Equity-Indexed Annuities: point to point, High Water Mark and Annual Ratchet. Annual Ratchet can be classified into two types. One is Compound Annual Ratchet and the other is Simple Annual Ratchet. We focus on the valuation of simple annual ratchet. Then, we derive single asset Quanto model and use Monte Carlo Simulation method to price Quanto Simple Annual Ratchet EIA. Finally, we exam the variation of cost by adjusting participation rate, cap rate and correlation between exchange rate and equity-linked underlying.

Keywords：Equity-Indexed Annuities, Quanto, Simple Annual Ratchet

壹、前言

目前市場上金融創新的產品非常多，像是股權連結商品、信用連結商品、利率商品…等。而保險市場上也興起了投資型保險商品，又稱作權益指數年金（Equity-Indexed Annuities，EIA） 與結構債形式十分類似，差異在於 EIA 只有在到期日才會有現金流量的流出，但結構債則是每一評價日有現金的流出。EIA 在保險市場上是一種新興且十分熱門的商品，它的契約期限相較於一般保險契約還來的短，大約五到十年，最典型的期間爲七年。其報酬是根據連結標的的表現而有所不同，契約中的參與率則是用來決定有多少百分比的指數連結報酬，若指數連結報酬表現一直處於虧損狀態，最小保證收益率可以避免下方風險。此外，它提供了定息（fixed-interest）和最低保證報酬率，受到大多數投資人的喜愛，EIA 商品在美國是一種越來越熱門的商品，由 Insurancenewsnet (2008)發布的新聞可知，其銷售量到 2007 年，已達到 251 億美元。表一爲 2002 年至 2007 年 EIA 於美國的銷售額。圖一爲 2003 年到 2007 年每季的銷售量，這些數據可參考 Advantage Compendiumm 於 2002 年至 2007 年所整理的數據。 網址爲：http://www.indexannuity.org/library.htm）

表 1、EIA 銷售金額

	EIA 銷售額(億美元)
2002 年	116.7
2003 年	140.2
2004 年	234.0
2005 年	272.6
2006 年	253.0
2007 年	251.0

資料來源： 本研究整理

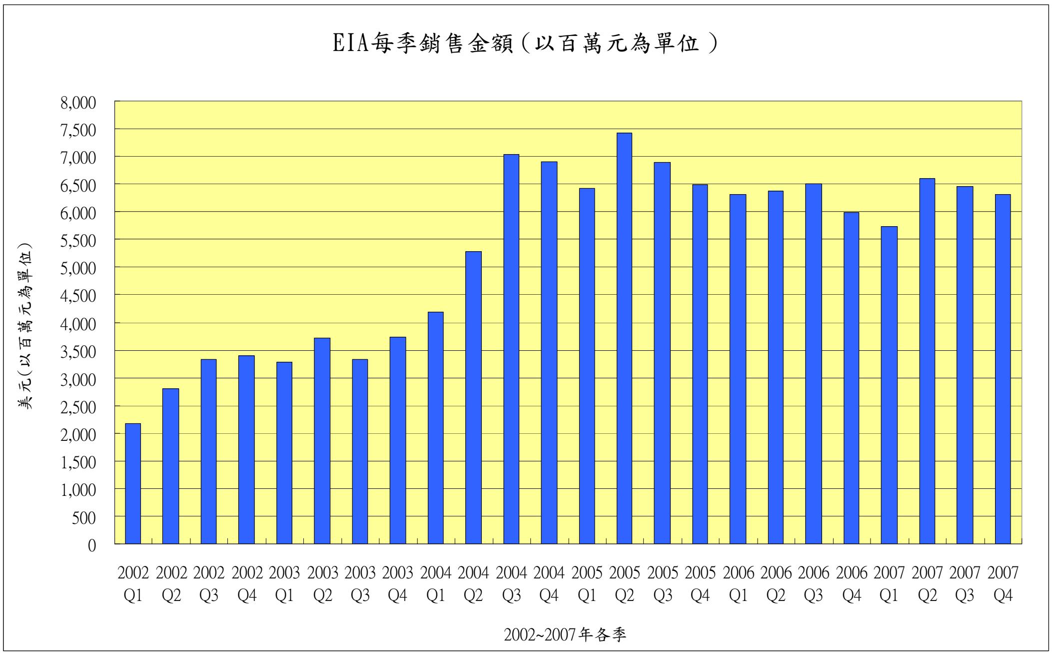

圖 1、EIA 每季銷售金額（以百萬元爲單位）
資料來源：同表一

從表 1 和圖 1 可得知，權益指數年金（EIA）的銷售額，持續的走高，不斷的創新紀錄，也代表著在美國市場上，投資人十分喜愛 EIA 商品。

EIA 是一種遞延的年金，介於定額年金和變額年金之間，但偏向於定額年金，具有定額遞延年金的特質，也就是說，投保人在購買年金起始日到年金給付日這段期間，可以一次給付或是分期支付保費給保險公司，等到到期時，則由保險公司支付年金，契約中的到期日爲年金開始給付的日期，並享有本金保障及身故的保障。此外，EIA 也具有變額年金的特質，亦即可像變額年金一樣參與市場上股價或指數上漲所帶來的獲利。在會計上，保險帳戶分爲兩種：分離帳戶（Separate Account）和一般帳戶（General Account）。傳統的年金、EIA 屬於一般帳戶，而變額年金屬於分離帳戶。在分離帳戶中，由於保險公司無法使用帳戶，因此是有保險人自行承擔風險，透過額外的管理人來管理分離帳戶內的投資部位，所以需支付額外的管理費用。一般帳戶則是由保險公司來承擔投資的風險，且從事的投資注重安全性。EIA 屬一般帳戶則可避免投資人自負風險，並享有保本及保息的優點。

由於台灣監理制度的因素，由國外所引進的 EIA 商品，必須放置於分離帳戶中，儘管如此，商品特性然仍爲 EIA 的特性，契約形式也與 EIA 商品相似，值得深入做研究。

EIA 的商品結構可拆解爲零息債券加上一新奇選擇權（Exotic Option，其內嵌的新奇選擇權可能是界限選擇權（Barrier Option）、亞式選擇權（Asian Option）、匯率連動選擇權（Quanto Option）、極大或極小選擇權（Options on the Maximum or the Minimum of Risky Assets），又稱彩虹選擇權（Rainbow Option）…等，或是综合以上各類新奇選擇權的特色所創造出來的商品。關於極大或極小選擇權的評價可參考 Johnson (1987)的文章，裡面針對多資產的極大或極小值歐式買權做了封閉解的推導和解釋。Boyle and Tse (1990)則提出近似解的方式來計算極大極小選擇權。Jean-Yves, Genevieve and Jean-Guy (2003)主要對亞式匯率連動選擇權（Asian quanto-basket option）做詳細的介紹，並用三種近似值法－lognormal distribution、inverse Gamma distribution 和 Johnson distribution 這三種分配來逼近亞式選擇權的分配，評價出亞式匯率連動選擇權的價值。Lee (2002)使用 Esscher Transforms 來推導 Barrier EIA 的封閉解。

本研究透過蒙地卡羅方法來評價單一資產 Quanto EIA，並調整參與率、保證收益率及匯率和連結標的的相關係數，看這三種參數的大小對於契約成本有何影響。

一、EIA 現金流量介紹

Hardy (2003)把 EIA 商品的契約型態分爲點對點（Point-to-Point，PTP）、高水檔（High Water Mark）和年度重設（Annual Ratchet）。由於 EIA 現金流量十分複雜，先定義相關變數：

t：表示時間，$0 \le t \le T$，可以月、季、年爲單位，0 表示起始日，T 表示標的價值的評價日。

CF_t：表示時間 t 的現金流量 (cash flow)，$0 \le t \le T$，CF_T 表示支付日的現金流量。

I_t： 連結標的 (reference index) 在時間 t 的價值 (value)，標的可爲個股或是指數，$0 \le t \le T$。

α：參與率。

P：本金。

F：爲區域（local）下限率，若多了下標 g，亦即 F_g 則代表爲全域（global）下限率。

C：爲區域（local）上限率，若多了下標 g，亦即 C_g 則代表爲全域（global）上限率。

G：固定收益

接下來，分別針對此三類現金流量做探討。

(一) 點對點（Point-to-Point）：PTP 為 EIA 中最簡單的契約，只看到期日的指數和期初指數，根據這兩天的指數來計算報酬。以下為 PTP 到期時的現金流量：

$$Max\left\{P\left(1+\alpha\left(\frac{I_t}{I_0}-1\right)\right),G\right\} \tag{1}$$

(二) 高水檔（High Water Mark）：High Water Mark 的型態則似衍生性商品中的回顧型選擇權（Lookback Option），到期時的收益（payoff）挑選契約期限中最大的指數，來計算報酬率。以下為其現金流量：

$$Max\left\{P\left(1+\alpha\left(\frac{I^{Max}}{I_0}-1\right)\right),G\right\} \tag{2}$$

此處，$I^{\max}=Max(I_0,I_1,I_2,\cdots I_T)$。

High Water Mark 的現金流量與 PTP 十分類似，差異在於 PTP 只挑選到期日當天的連結標的來計算報酬，但 High Water Mark 則是挑選從起始日至到期日這段期間中，連結標的最大的績效來計算報酬率，對投資人來講，能獲取較高的利潤，但是相對的，其參與率則會較低。

(三) 年度重設（Annul Ratchet）：Annual Ratchet 又分為複利年度重設（Compound Annual Ratchet，CAR）和簡單年度重設（Simple Annual Ratchet，SAR）。Ratchet 的特色在於每期報酬會鎖定，這一期的報酬不影響下一期的報酬。Compound Annual Ratchet 在計算時，以複利方式計算，先算出當期的本利和後，再當成是下一期的本利。Simple Annual Ratchet 的計算方式為單利，將每期計算出來的指數價值加總。參與率（Participation rate）在 Annual Ratchet 中占有重要角色，當參與率越高，給付的年金則越多。上限率則是用來用來減少參與率的影響力，此外又可降低投資人的下方風險，當上限率增加時，契約價值與敏感度皆會上升，反之亦然（可參見 Buetow Jr (1999)的文章）。Compound Annual Ratchet 在到期日的現金流量為：

$$P\times\prod_{t=1}^{T}\left\{1+Min\left(Max\left(\alpha\times\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}-1\right),F\right),C\right)\right\} \tag{3}$$

Simple Annual Ratchet 在到期日的現金流量為：

$$P\times\left\{1+\sum_{t=1}^{T}Min\left(Max\left(\alpha\times\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}-1\right),F\right),C\right)\right\} \tag{4}$$

美商花旗銀行於 2001 年發行的 FTSE 全球生化製藥指數投資型外幣定期存款，其投資收益的計算方式即是此類現金流量，連結標的為 FTSE 全球生化製藥指數，契約期限兩年。

一般而言，通常假設 EIA 商品中的利率為固定值，連結的指數服從對數常態分配（lognormal distribution）。若要將利率改成浮動利率，可參考 Lin and Tan (2003)寫的文章。以上這兩種商品的評價方式，Hardy (2004)已推演出來，Compound Annual Ratchet 有封閉解，可直接評價，而 Simple Annual Ratchet 的評價 Hardy (2004)使用了蒙地卡羅及三元樹的方法來計算。另外，Hsieh and Chiu (2007)推導出 Simple Annual Ratchet 的封閉解，並使用 control variates，讓蒙地卡羅模擬變得更有效率。

Ratchet 又可稱作 Cliquet，最早的 Cliquet Option 於 1996 年發行，連結的標的

爲 S&P500。以下爲 Cliquet 現金流量的契約形式，與 Simple Annual Ratchet 類似：

$$\overline{R} = Max\left(Min\left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1, C\right), F\right)$$ ，爲 Truncated return。

$$CF_T = P \times Max\left(F_g, Min\left(\sum_{t=1}^{T} \overline{R}_t, C_g\right)\right) \tag{5}$$

Local 上限率和下限率主要是跟每一期的報酬率來比較，而 global 上限和下限率則是與全部加總後的報酬率來做比較。台新銀行在 2003 年發行的「台新七年期美元保本 NASDAQ100 指數連動式債券」，產品計息方式與公式（5）相似。目前已有不少關於 Cliquet 的研究，Windcliff, Forsyth and Vetzal (2006)比較了不同的數值方法來評價 Cliquet，像是內插法（interpolation）和網格技術（grid construction techniques），此外也對於波動度模型的假設做更詳細的比較。Mats (2006)比較了蒙地卡羅、準蒙地卡羅（quasi-Monte Carlo）和有限差分法評價 Cliquet 的精確性。Den Iseger and Oldenkamp (2005)用 Laplace transform 評價了 BS model 下的 Cliquet、jump-diffusion 下的 Cliquet 和波動度爲隨機項的 Cliquet，也計算了相關的避險參數，如 delta hedging、gamma hedging、rho hedging 和 vega hedging。

貳、模型設定

一、單一資產 Quanto 模型

假設有一完全市場（complete market），存在一檔以 A 幣計價的標的（underlying）（N=1），一個對 A 幣的匯率，一外國無風險利率（r_f）和一本國無風險利率（r）。S_t 代表在時間點 t 時的連結標的，$t \geq 0$。C_t 代表在時間點 t 時的匯率（本國幣 / A 幣），$t \geq 0$。B_t 代表在時間點 t 時的外國無風險公債（cash bond），$t \geq 0$。D_t 代表在時間點 t 時本國的無風險公債（cash bond）。此外，我們假設連結標的以及匯率皆服從幾何布朗運動。連結標的和匯率的共變異舉陣爲 Σ。我們定義測度 P 爲現實環境下的測度，在 P 測度（measure P）下，外國標的和匯率的 SDE（stochastic differential equation）分別爲：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s dt + \sigma_s dW_s(t) \tag{6}$$

$$\frac{dC_t}{C_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_c(t) \tag{7}$$

在此處，$W_s(t)$ 和 $W_c(t)$ 爲標準布朗運動（standard Browniam motion），但彼此之間具有相關性 ρ_{sc}，σ_s 和 σ_c 分別爲連結標的和匯率的波動度，爲固定值（constant）。

此外，假設外國公債及本國公債的利率皆爲固定（constant），則外國公債和本國公債的 SDE 分別爲：

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt \tag{8}$$

$$\frac{dD_t}{D_t} = r_f dt \tag{9}$$

我們定義 Q 爲無風險機率測度，又稱作等價平賭機率測度（Equivalent Martingale Measure），根據 Girsonov Theorem，可以將 P 測度轉換到 Q 測度，在 Q 測度下，波動項（diffusion term）和 P 測度下的波動項相同，差異只在於漂移項（drift term），由於是一完全市場，利率假設爲固定數，透過風險中立評價準則（risk-neutral valuation principle）

可得知，商品的評價則可用期望值來表示，並且用無風險利率來折現（可參考 Hull (2006) 的第 25 章，關於 Martingales 和測度的介紹）。用符號來表示則爲：

$$V_0 = e^{-rT}E[Y] \tag{10}$$

此處，Y 代表商品的到期收益公式（payoff），V_0 則是在時間點 0，商品的價值。

在 Quanto 模型下，匯率和外國連結標具有相關性，因此需要透過 cholesky decomposition 將他們的相關性拆解掉。根據 Baxter and Rennie (1996)所述，其共變異數爲：

$$\mathrm{cov}\left(\frac{dC_t}{C_t},\frac{dS_t}{S_t}\right)=\mathrm{cov}(d\ln C_t, d\ln S_t)=\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_c^2 & \rho_{s,c}\sigma_c\sigma_s\\ \rho_{s,c}\sigma_s\sigma_c & \sigma_s^2\end{bmatrix}t \tag{11}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_c^2 & \rho_{s,c}\sigma_c\sigma_s\\ \rho_{s,c}\sigma_c\sigma_s & \sigma_s^2\end{bmatrix}t=\begin{bmatrix}\sigma_c & 0\\ \rho_{s,c}\sigma_s & \sqrt{1-\rho_{s,c}^2}\,\sigma_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_c & 0\\ \rho_{s,c}\sigma_s & \sqrt{1-\rho_{s,c}^2}\,\sigma_s\end{bmatrix}^T$$

所以，$\Sigma = A\cdot A^T$，A 爲 time average variance constant。

經過一些運算後，我們可找出一獨特的 Q 測度，根據 Jean-Yves, Genevieve and Jean-Guy (2003)的推導結果，我們將外國標的在 Q 測度下的 SDE 改寫爲：

$$\frac{dS_t}{S_t}=\left(r_f-\delta_s-\frac{1}{2}\sigma_s^2-\rho_{s,c}\sigma_s\sigma_c\right)dt+\sum_{j=1}^{2}A_{2j}\cdot\widetilde{W}_j(t) \tag{12}$$

此處，δ_s 代表外國連結標的所發放的年股利，是一固定的數值，σ_c 代表匯率的波動度，$\sigma_s=\sqrt{\sum_{j=1}^{i}A_{2,j}^2}$，也就是連結標的在 P 測度下的波動度，$\rho_{s,c}=corr\left(\frac{dS_t}{S_t},\frac{dC_t}{C_t}\right)$，$\sum_{j=1}^{i}A_{2j}\cdot\widetilde{W}_j(t)$ 爲此隨機微分方程的波動項（volatility term），則 S_t 爲：

$$S_t=S_0\times\exp\left(\left(r_f-\delta_s-\frac{1}{2}\sigma_s^2-\rho_{s,c}\sigma_s\sigma_c\right)\times t+\sum_{j=1}^{2}A_{2j}\cdot\widetilde{W}_j(t)\right) \tag{13}$$

叁、案例商品

一、數值例子

本文用公式(4)來計算 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價格。首先，先解釋契約內容，我們假設契約 7 年到期（T = 7），期初投資本金爲 100 元（P = 100），連結標的年波動度爲 25%，匯率波動度爲 15%，本國年利率爲 5%，外國年利率爲 6%，股利率爲 2%，下限率爲 0%，連結標的和匯率的相關係數（$\rho_{s,c}$）分別用 0.05、0.1、0.2、0.3、0.4、0.5 代入，總共模擬 10000 次。

公式（4）中關於報酬率的部份，由模型設定那章可得知 $\ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)$ 是獨立的常態變數（normal variable），其平均數爲 $r_f-\delta_s-\frac{1}{2}\sigma_s^2-\rho_{s,c}\sigma_s\sigma_c$，標準差爲 σ_s，因此在模擬時，即可得到 10000 個獨立的 $\ln\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)$，將其帶入公式（4）可算出 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 的價格。表 2 和表 3 爲 $\rho_{s,c}$= 0.05 所算出來的價格和標準誤。

表 2、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格，　$\rho_{s,c} = 0.05$

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	89.65	99.27	103.79	103.54	105.65
0.8	91.09	103.65	110.86	110.92	115.09
1.0	91.96	106.96	116.26	116.10	122.50
1.2	92.55	108.75	120.42	120.61	128.61

表 3、表 2 的標準誤

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.12	0.20	0.25	0.25	0.28
0.8	0.12	0.22	0.29	0.29	0.33
1.0	0.12	0.23	0.31	0.31	0.37
1.2	0.13	0.23	0.32	0.33	0.41

表 4 和表 5 為 $\rho_{s,c} = 0.1$ 所算出來的價格和標準誤。

表 4、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格，　$\rho_{s,c} = 0.1$

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	89.42	95.47	99.09	103.58	105.05
0.8	90.83	97.88	103.27	110.72	114.38
1.0	91.80	99.93	106.41	116.02	121.60
1.2	92.34	101.02	108.35	119.97	127.65

表 5、表 4 的標準誤

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.12	0.16	0.20	0.25	0.28
0.8	0.12	0.17	0.21	0.29	0.33
1.0	0.12	0.18	0.23	0.31	0.37
1.2	0.13	0.19	0.24	0.33	0.40

表 5 和表 6 為 $\rho_{s,c} = 0.2$ 所算出來的價格和標準誤。

表 5、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格，　$\rho_{s,c} = 0.2$

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	89.27	94.83	98.68	102.79	104.51
0.8	90.41	97.28	102.54	109.88	113.48

1.0	91.51	99.32	106.26	114.88	121.06
1.2	92.14	100.90	108.14	119.34	126.90

表 6、表 5 的標準誤

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.12	0.16	0.20	0.25	0.27
0.8	0.12	0.17	0.22	0.28	0.33
1.0	0.13	0.18	0.23	0.31	0.37
1.2	0.13	0.18	0.23	0.33	0.40

表 7 和表 8 為 $\rho_{s,c} = 0.3$ 所算出來的價格和標準誤。

表 7、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格， $\rho_{s,c} = 0.3$

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	89.01	94.63	98.31	102.26	103.85
0.8	90.24	97.26	102.33	109.13	112.76
1.0	91.18	98.89	105.28	114.41	119.84
1.2	91.74	100.21	107.08	118.68	125.70

表 8、表 7 的標準誤

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.12	0.16	0.20	0.25	0.27
0.8	0.12	0.17	0.21	0.28	0.33
1.0	0.12	0.18	0.23	0.30	0.37
1.2	0.12	0.18	0.23	0.32	0.39

表 9 和表 10 為 $\rho_{s,c} = 0.4$ 所算出來的價格和標準誤。

表 9、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格， $\rho_{s,c} = 0.4$

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	88.57	94.11	97.68	101.61	103.21
0.8	90.08	96.66	102.06	108.46	112.16
1.0	90.94	98.38	105.03	113.50	119.04
1.2	91.42	99.81	106.67	117.37	125.11

表 10、表 9 的標準誤

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.12	0.16	0.19	0.24	0.27
0.8	0.12	0.17	0.21	0.28	0.32
1.0	0.12	0.18	0.23	0.30	0.36
1.2	0.13	0.18	0.23	0.32	0.39

表 11 和表 12 為 $\rho_{s,c} = 0.5$ 所算出來的價格和標準誤。

表 11、Quanto Simple Annual Ratchet EIA 價格， $\rho_{s,c} = 0.5$

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	88.51	93.41	97.27	101.11	102.54
0.8	89.83	96.18	101.42	107.99	111.49
1.0	90.45	98.07	104.03	113.00	118.63
1.2	91.22	99.50	106.42	116.90	124.22

表 12、表 11 的標準誤

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	0.12	0.16	0.20	0.24	0.27
0.8	0.12	0.17	0.21	0.28	0.32
1.0	0.12	0.18	0.23	0.31	0.36
1.2	0.12	0.18	0.23	0.32	0.39

肆、結果分析

從表 2 到表 12 可發現，當參與率越高，代表投資人所享受到的收益倍數越大，相對也代表 Quanto Simple Annual Ratchet 的成本越高。同樣地，當上限率越高，Quanto Simple Annual Ratchet 的成本也越高，以表 11 為例，我們固定參與率，看上限率對商品的成本如何變化，將成本變化列於表 13。另外我們也固定上限率，看參與率的變化對成本的影響，將成本變化列於表 14。

表 13、固定參與率後，上限率的變化對於商品成本的影響

Participation α	Cap rate c 的變化（per year）			
	10% -> 15%	10% -> 20%	10% -> 30%	10% -> 40%
0.6	5.54%	9.90%	14.24%	15.85%
0.8	7.07%	12.90%	20.21%	24.11%
1.0	8.43%	15.02%	24.93%	31.15%
1.2	9.09%	16.67%	28.15%	36.18%

表 14、固定上限率後，參與率的變化對於商品成本的影響

Participation α 的變化	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6 -> 0.8	1.50%	2.97%	4.27%	6.80%	8.73%
0.6 -> 1.0	2.19%	4.99%	6.95%	11.76%	15.69%
0.6 -> 1.2	3.06%	6.52%	9.41%	15.61%	21.14%

從表 13 和表 14 可看出，假設上限率和參與率對投資人的效用是相同的，當上限率增強爲兩倍時，商品成本的增加幅度大於參與率增強爲兩倍的幅度。因此，若發行商想增加參與率或是上限率來吸引投資人投資時，可提高參與率的水準，不僅可以吸引投資人，也可避免商品成本過高。

從相關係數這個維度來看，連結標的與匯率的相關係數越高，商品成本越低。因此，若相關系數較高，調整參與率和上限率時，對成本的影響力就相對著變小了。表 15 爲將 $\rho_{s,c}=0.4$ 改成 0.5 後，商品的成本變化。表 16 爲將 $\rho_{s,c}=0.3$ 改成 0.5 後，商品的成本變化。

表 15、將 $\rho_{s,c}=0.4$ 改成 0.5 後，商品的成本變化

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	-0.07%	-0.75%	-0.42%	-0.49%	-0.65%
0.8	-0.27%	-0.50%	-0.63%	-0.44%	-0.60%
1.0	-0.55%	-0.31%	-0.96%	-0.45%	-0.35%
1.2	-0.22%	-0.31%	-0.23%	-0.40%	-0.72%

表 16、將 $\rho_{s,c}=0.3$ 改成 0.5 後，商品的成本變化

Participation α	Cap rate c（per year）				
	10%	15%	20%	30%	40%
0.6	-0.57%	-1.30%	-1.07%	-1.14%	-1.28%
0.8	-0.45%	-1.12%	-0.90%	-1.06%	-1.14%
1.0	-0.80%	-0.83%	-1.20%	-1.25%	-1.02%
1.2	-0.58%	-0.71%	-0.62%	-1.53%	-1.20%

站在發行商的角度，以表 9 爲例，發行商向投資人收取 100 元契約本金，上限率 10%，參與率 60%，產品總價值爲 88.5729 元，發行商賺的利潤爲 11.43%。若發行商要預計要賺取利潤 8%左右，以表 7 的數據來講，當上限率 10%，參與率 100%和 120%，其產品成本分別爲 91.1759 元和 91.7443 元，發行商賺取的利潤爲 8.82%和 8.26%，但是對投資人而言，上限率 10%，參與率 120%的吸引力大於上限率 10%，參與率 100%，因此發行商可以透過調整上限率及參與率設計出對公司利潤最合適，且對符合投資人預期的契約。

伍、結論與後續研究

本文一開始先介紹了三種 EIA 的現金流量型態：點對點（PTP） 高水檔（High Water Mark）和年度重設（Annual Ratchet） 並使用蒙地卡羅來評價 Quanto Simple Annnual Ratchet EIA，從數值例子中可發現，當上限率和參與率越高時，投資人所獲得的利潤比例增加，且商品成本也增加，上限率的變動對成本的影響幅度大於參與率變動。此外，當連結標的與匯率間的相關係數越大，商品的價格相較於低的相關係數還來的低。

最後，本文提出一些未來繼續研究的方向：

1. 將 Quanto Simple Annual Ratchet EIA 和 Quanto Compound Annual Ratchet EIA 的封

閉解推導出來。

2. 加入變異數縮減技術（variance reduction），可以增進蒙地卡羅模擬的效率。
3. 將利率和波動度改為隨機（stochastic）的模型。
4. 針對利率和波動度做敏感度分析。

參考文獻

Baxter, M. W., and A. J. O. Rennie, 1996. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing* (Cambridge University Press).

Boyle, Phelim P., and Y Tse, 1990, An algorithm for computing values of options on the maximum or minimum of several assets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, 215-227.

Buetow Jr, G. W., 1999, Ratchet options, *Journal of Financial and Strategic Decisions* 12, 17-30.

Den Iseger, P., and E. Oldenkamp, 2005, Cliquet options: pricing and Greeks in deterministic and stochastic volatility models, (working paper).

Hardy, M., 2003. *Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance* (Wiley).

Hardy, M., 2004, Ratchet Equity Indexed Annuities, *14th Annual International AFIR Colloquium*.

Hsieh, M., and Y. Chiu, 2007, Monte Carlo methods for valuation of ratchet equity indexed annuities, *Simulation Conference, 2007 Winter* 998-1003.

Hull, J., 2006. *Options, futures, and other derivatives* (Prentice Hall Upper Saddle River, NJ).

Insurancenewsnet, 2008, AnnuitySpecs.com Releases Fourth Quarter, 2007 Indexed Sales Results.

Jean-Yves, Datey, Gauthier Genevieve, and Simonato Jean-Guy, 2003, The performance of analytical approximations for the computation of Asian quanto-basket option prices, *Multinational Finance Journal* 7, 55-81.

Johnson, Herb, 1987, Options on the maximum or the minimum of several assets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, 277-283.

Lee, H., 2002, Pricing Equity-Indexed Annuities embedded with Exotic options, (Contingencies).

Lin, X. S., and K. S. Tan, 2003, Valuation of Equity-Indexed Annuities under stochastic interest rates, *North American Actuarial Journal* 7, 72-91.

Mats, Kjaer, 2006, Fast pricing of Cliquet options with global floor, *Journal of Derivatives* 14, 47.

Windcliff, H. A., P. A. Forsyth, and K. R. Vetzal, 2006, Numerical methods and volatility models for valuing Cliquet options, *Applied Mathematical Finance* 13, 353-386.